

**Die Schnittmaß-Funktionen
meßbarer Teilmengen
eines Produktraumes**

Hans G. Kellerer

1960

Die Schnittmaß-Funktionen

meßbarer Teilmengen

eines Produktraumes

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität
zu München

Vorgelegt von Hans G. Kellerer im Juni 1960

1. Referent: Prof. Dr. H. Richter

2. Referent: Prof. Dr. G. Aumann

Tag der mündlichen Prüfung: 30.11.60

Inhaltsverzeichnis

§ 0.	Bezeichnungen	1
§ 1.	Einleitung	3
§ 2.	Atomare und atomlose Maße	9
§ 3.	Endgültige Formulierung des Hauptproblems	15
§ 4.	Der Fall endlicher Grundmengen	20
§ 5.	Der erste Hauptsatz	28
§ 6.	Der zweite Hauptsatz	42
§ 7.	Die Gesamtheit der Schnittmaß-Funktionen	51
§ 8.	N-fache Produkträume	63
§ 9.	Anhang zum Satz von Liapounoff	68
§ 10.	Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse	75

Digitized by the Internet Archive
in 2026



§0. Bezeichnungen

1. Für die mengenalgebraischen Verknüpfungsoperationen werden folgende Zeichen verwendet:

$A \cap B$ bzw. ΠA_n für den Durchschnitt und

$A \cup B$ bzw. ΣA_n für die Vereinigung der Mengen A, B bzw. A_n

($A \cup B$ bzw. ΣA_n , falls die Mengen disjunkt sind),

sowie $A \setminus B$ für den Unterschied von A und B , wobei insbesondere

$$B \setminus A = A \setminus B \text{ für } A \subset B \text{ und}$$

$$\bar{A} = M \setminus A, \text{ falls } M \text{ die Grundmenge ist.}$$

2. Ein Maßraum ist ein Tripel $(M, \mathcal{K}, \mu)$ bestehend aus dem Maß μ auf dem σ -Körper $\mathcal{K}$ über der Grundmenge M .

Insbesondere definiert das Lebesgue-Maß auf der Gesamtheit der Borelschen Mengen des n -dimensionalen Raumes den Maßraum

$$(R_n, \mathcal{L}_n, \lambda_n).$$

3. Der Maßraum $(M, \mathcal{K}, \mu)$ heißt endlich, falls $\mu(M) < \infty$, und normal, falls $\mathcal{K}$ eine Zerlegung $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ mit $\mu(M_n) < \infty$ enthält.

Eine Menge $A \in \mathcal{K}$ heißt Atom (bzgl. μ), falls aus $A \supset B \in \mathcal{K}$ stets

$$\mu(B) = 0 \text{ oder } \mu(B) = \mu(A) \text{ folgt.}$$

Der Maßraum heißt atomar, falls $\mathcal{K}$ eine Zerlegung $M = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ in Atome A_n enthält, und atomlos, falls alle Atome in $\mathcal{K}$ vom Maß Null sind.

Der Maßraum heißt separabel, falls in der Gesamtheit der Mengen endlichen Maßes eine bzgl. der Quasi-Metrik $|A, B| = \mu(A \setminus B)$ dichte abzählbare Teilmenge existiert.

4. Ist $\mathcal{L}$ eine Gesamtheit von Teilmengen von M , so ist $\sigma\mathcal{L}$ ($^{\sigma}\mathcal{L}$) der kleinste $\mathcal{L}$ umfassende Mengenkörper (σ -Körper).

Für $A \subset M$ ist ferner $A\mathcal{L} = \{AC: C \in \mathcal{L}\}$;

ist dabei $\mathcal{L}$ ein Mengenkörper (σ -Körper) über M , so ist also $A\mathcal{L}$ ein Mengenkörper (σ -Körper) über A .

Wie üblich bezeichnet $\chi_A(x)$ die charakteristische Funktion zur

Menge A und das Zeichen $\mu \ll \nu$ die Absolut-Stetigkeit des Maßes μ $\bar{\kappa}$ im Bezug auf das Maß ν $\bar{\kappa}$.

5. $(M, \bar{\kappa}, \mu)$ heißt Produktraum der Maßräume $(M_i, \bar{\kappa}_i, \mu_i)$ ($i = 1, 2$), falls M die Produktmenge $(M_1, M_2) = \{(x_1, x_2): x_i \in M_i\}$,

$\bar{\kappa}$ der σ -Körper $\bar{\kappa}_1 \times \bar{\kappa}_2 = \{(X_1, X_2): X_i \in \bar{\kappa}_i\}$ und

μ das Produktmaß $\mu_1 \times \mu_2$ ist

(entsprechend bei n -fachen Produkträumen).

Für $A \subset M$ bezeichnet dabei A_{x_i} die zu $x_i \in M_i$ gehörige Schnittmenge.

6. $\mathcal{L}(M, \bar{\kappa}, \mu)$ - kurz $\mathcal{L}(\mu)$ - bezeichnet den linearen Raum der $\bar{\kappa}$ -meßbaren μ -integrierbaren Funktionen $f|M$ mit der Norm $\|f\| = \int_M |f| d\mu$; zwei Funktionen $f_i \in \mathcal{L}(\mu)$ mit $f_1 \bar{\kappa} = f_2$ werden also identifiziert.

Auf Grund des Isomorphiesatzes für den dualen Raum läßt sich die schwache Konvergenz in $\mathcal{L}(\mu)$ folgendermaßen definieren:

$f_n \rightarrow f$ genau dann, wenn $\int_M f_n g d\mu \rightarrow \int_M f g d\mu$

für jede $\bar{\kappa}$ -meßbare μ -fast beschränkte Funktion $g|M$.

7. $\mathcal{M}(M, \bar{\kappa}, \mu)$ - kurz $\mathcal{M}(\mu)$ - bezeichnet die Gesamtheit der $\bar{\kappa}$ -meßbaren Funktionen $f|M$, die μ -fast nicht-negativ und endlich sind.

Um eine uneingeschränkte Gültigkeit des Satzes von Fubini für nicht-negative Funktionen zu erreichen, wird allgemein μ -fast nicht-negativen $\bar{\kappa}$ -meßbaren Funktionen, die im üblichen Sinn nicht integrierbar sind, der Integralwert unendlich zugeschrieben.

8. Im übrigen sei bzgl. der verwendeten Definitionen und Sätze der Maßtheorie verwiesen auf [3] (siehe Literaturverzeichnis).

An logistischen Zeichen findet lediglich der definierende Doppelpunkt vor dem Gleichheitszeichen Verwendung.

Auf Satz... wird allgemein durch [...] hingewiesen.

Das Symbol $\perp$ dient dazu, das Ende eines Beweises zu kennzeichnen.

Die im Verlauf mehrmals zitierten Bedingungen (A), (G), (R), (T) werden auf den Seiten 17, 18, 29, 20 definiert.

§1. Einleitung

1. Im Jahre 1940 bewies A. Liapounoff folgenden Satz ([7]):
Sind $\mu_1, \dots, \mu_n$ atomlose endliche Maße auf einem σ -Körper $\mathcal{K}$, so ist der zugehörige Wertebereich $\{(\mu_1(A), \dots, \mu_n(A)) : A \in \mathcal{K}\}$ eine konvexe und kompakte Teilmenge des R_n .

(Ein einfacher Beweis findet sich im Anhang; andere Beweise werden in [5] und [6] gegeben; eine gewisse Verallgemeinerung ist in [8] enthalten.)

2. Beim Versuch, diesen Satz auf eine Folge atomloser endlicher Maße μ_n auf dem σ -Körper $\mathcal{K}$ über der Grundmenge M zu übertragen, ist zunächst eine gewisse Vereinfachung möglich.

Denn $\mu(A) := \sum_{\mathbb{Z}} (2^n (\mu_n(M) + 1))^{-1} \mu_n(A)$ für $A \in \mathcal{K}$

ist ein atomloses endliches Maß derart, daß $\mu_n \ll \mu$ für alle n .

Daher läßt sich das Problem auch folgendermaßen formulieren:

Gegeben sind ein atomloses endliches Maß μ auf $\mathcal{K}$ und eine abzählbare

Menge nicht-negativer Funktionen $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots\} \subset \mathcal{L}(\mu)$;

zu untersuchen ist die Gesamtheit $\left\{ \int_A f d\mu : A \in \mathcal{K} \right\}$ - betrachtet im linearen Raum aller reellen Funktionen über $\mathcal{F}$ mit der aus der Definition der stellenweisen Konvergenz abgeleiteten Topologie.

3. Es zeigt sich nun, daß der Satz von Liapounoff hier im allgemeinen seine Gültigkeit verliert; dazu ein einfaches Beispiel:
Zugrundegelegt werde der Maßraum $(I, \mathcal{I}_1, \lambda_1)$ mit $I := [-1, +1] \subset R_1$;
 $\mathcal{F}$ bestehe aus den Funktionen $\chi_{[t-\frac{1}{2}, t+\frac{1}{2}]}$ mit rationalem $t \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$
(anschaulich gesprochen handelt es sich also um Gleichverteilungen über einen Intervall mit fester Länge und variablem Mittelpunkt).

Wäre hier der zugehörige Wertebereich konvex, so gäbe es insbesondere eine Menge $A_0 \in \mathcal{I}_1$ mit

$$\int_{A_0} f d\lambda_1 = \frac{1}{2} \int_{[0,1]} f d\lambda_1 \quad \text{für } f \in \mathcal{F};$$

für $f_0 = \chi_{[-1,0]} \in \mathcal{F}$ folgt daraus

$$\lambda_1([[-1,0] \cap A_0]) = \int_{A_0} f_0 d\lambda_1 = \frac{1}{2} \int_{[0,1]} f_0 d\lambda_1 = 0,$$

d.h. es läßt sich $A_0 \subset [0,1]$ annehmen.

Die Maße $\mu_1(A) := \lambda_1(A \cap A_0)$ und $\mu_2(A) := \frac{1}{2} \lambda_1(A)$ stimmen also überein, falls $A = [0,s]$ mit rationalem $s \in [0,1]$.

Daher gilt $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ allgemein auf dem Mengenkörper der endlichen Vereinigungen rationaler Teilintervalle von $[0,1]$ und damit für alle Borelschen Teilmengen von $[0,1]$.

Daraus folgen, falls für A die Mengen A_0 und $[0,1] - A_0$ gewählt werden, die nicht miteinander zu vereinbarenden Gleichungen

$$\lambda_1(A_0) = \frac{1}{2} \lambda_1(A_0) \quad \text{und} \quad 0 = \frac{1}{2} (1 - \lambda_1(A_0)).$$

Die Annahme der Konvexität führt also zu einem Widerspruch.

Gemäß dem Satz von Liapounoff existieren jedoch, falls

$\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots\}$, Mengen $A_n \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$, derart, daß

$$\int_{A_n} f_i d\lambda_1 = \frac{1}{2} \int_{[0,1]} f_i d\lambda_1 \quad \text{für } i \leq n.$$

Daher ist der zu $\mathcal{F}$ gehörige Wertebereich nicht abgeschlossen und damit auch nicht kompakt.

4. Bei der Untersuchung, für welche Teilmengen $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(\mu)$ der zugehörige Wertebereich konvex oder abgeschlossen ist, ist es offensichtlich möglich, von $\mathcal{F}$ zu dem von $\mathcal{F}$ erzeugten linearen Teilraum überzugehen, ohne an den fraglichen Eigenschaften etwas zu ändern.

Während nun dieser Teilraum für endliches $\mathcal{F}$ stets (bzgl. der Norm in $\mathcal{L}(\mu)$) abgeschlossen ist, muß dies für unendliches $\mathcal{F}$ nicht gelten - und darin liegt der Hauptunterschied des Falles endlich vieler bzw. unendlich vieler Maße.

Denn die Abschließung spielt gleichfalls keine Rolle, da beim Bestehen von $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_0\| = 0$ aus

$$\left. \begin{aligned} \int_A f_n d\mu &= \int_{A_1} f_n d\mu + \int_{A_2} f_n d\mu \\ \int_A f_n d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f_n d\mu \end{aligned} \right\} \text{ für } n \in \mathbb{Z}$$

sehr leicht die Gültigkeit dieser Gleichungen auch für $n=0$ folgt.

5. Der wesentliche Schritt beim Beweis des Satzes von Liapounoff besteht in dem Nachweis, daß zu jeder Menge $A \in \mathcal{K}$ eine Menge $B \in \mathcal{AK}$ existiert mit

$$\mu_i(B) = \frac{1}{2} \mu_i(A) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Eine notwendige Bedingung dafür ist im unendlichen Fall aus 2. auf Grund der Überlegungen in 4.:

$$\mathcal{T}(\mathcal{F})|_A \in \mathcal{L}(\mu)|_A \quad \text{für } \mu(A) > 0,$$

wobei $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ den durch $\mathcal{F}$ erzeugten abgeschlossenen linearen Teilraum von $\mathcal{L}(\mu)$ bezeichnet.

Denn ist $B \subset A$, so ergibt die Gleichung

$$\int_B f d\mu = \frac{1}{2} \int_A f d\mu \quad \text{für } f|_A = \chi_A - 2\chi_B \in \mathcal{L}(\mu)|_A$$

$$\mu(B) - 2\mu(B) = \frac{1}{2}\mu(A) - \mu(B), \text{ d.h. } \mu(A) = 0.$$

Es ist leicht zu sehen, daß die angegebene Bedingung bei dem Beispiel aus 3. etwa für $A = [0,1]$ verletzt ist.

Denn hier enthält $\mathcal{T}(\mathcal{F})|_A$ zunächst die Funktionen $\chi_{[0,t]}$ für rationales $t \in A$, also wegen der Linearität die charakteristischen Funktionen zu endlichen Vereinigungen rationaler Teilintervalle von A und damit wegen der Abgeschlossenheit zu allen offenen Teilmengen von A ; da sich jede borelsche Menge beliebig gut durch eine umfassende offene Menge approximieren läßt, liegen also alle Funktionen χ_B mit $B \in \mathcal{AK}_0$ in $\mathcal{T}(\mathcal{F})|_A$.

Daher enthält $\mathcal{T}(\mathcal{F})|_A$ wegen der Linearität jede endliche Treppenfunktion, so daß wegen der Abgeschlossenheit $\mathcal{T}(\mathcal{F})|_A = \mathcal{L}(\mu)|_A$.

6. Die Bedingung in 5. läßt sich unter Umständen dadurch erfüllen, daß von den Maßen μ_n auf $\mathcal{K}$ zu den Produktmaßen $\mu_n \times \mu_n$ auf dem Produkt- σ -Körper $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ (bzw. allgemeiner zu den n -fachen Pro-

dukten) übergegangen wird.

Ohne näher darauf einzugehen, sei nur festgestellt, daß dieser Übergang jedenfalls sinnvoll ist innerhalb jenes Problemkreises, in dem der Satz von Liapounoff vor allem von Bedeutung ist.

Allgemeine Ergebnisse lassen sich allerdings auch dann schwer erzielen.

7. Angewendet auf das Beispiel aus 3. liefert dieser Übergang jene Maße, die durch die Funktionen $f_t(x_1, x_2) := \prod_{i=1,2} \chi_{[t-\frac{1}{2}, t+\frac{1}{2}]}(x_i)$

für rationales $t \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$ im Maßraum $(R_2, \mathcal{X}_2, \lambda_2)$ definiert sind.

Es ist also für $A \in \mathcal{X}_2$ die Existenz einer Menge $B \in \mathcal{X}_2$ zu zeigen mit

$$\int_B f_t d\lambda_2 = \frac{1}{2} \int_A f_t d\lambda_2 \quad \text{für rationales } t \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}].$$

Ist dabei etwa $A \subset ([0, \frac{1}{2}], [-\frac{1}{2}, 0])$, so bedeutet das explizit

$$\int_{[0, t+\frac{1}{2}]} \lambda_1(B_{x_1}) d\lambda_1 = \frac{1}{2} \int_{[0, t+\frac{1}{2}]} \lambda_1(A_{x_1}) d\lambda_1 \quad \text{für rationales } t \in [-\frac{1}{2}, 0],$$

$$\int_{[t-\frac{1}{2}, 0]} \lambda_1(B_{x_2}) d\lambda_1 = \frac{1}{2} \int_{[t-\frac{1}{2}, 0]} \lambda_1(A_{x_2}) d\lambda_1 \quad \text{für rationales } t \in [0, +\frac{1}{2}].$$

Wegen $B \subset A \subset ([0, \frac{1}{2}], [-\frac{1}{2}, 0])$ sind diese Gleichungen äquivalent mit

$$\lambda_1(B_{x_i}) = \frac{1}{2} \lambda_1(A_{x_i}) \quad \text{für } \lambda_1\text{-fast alle } x_i \quad (i = 1, 2).$$

8. Das führt zu einem vollkommen neuen Problem:

Enthält eine meßbare Menge $A \subset R_2$ stets eine meßbare Teilmenge B derart, daß λ_1 -fast alle Schnittmengen von B genau das halbe Maß der entsprechenden Schnittmenge von A besitzen?

Für Rechtecke $R = (X_1, X_2)$ mit $X_i \in \mathcal{X}_1$ läßt sich diese Frage bejahen; denn ist $X_i = Y_i^1 + Y_i^2$ eine Zerlegung in $\mathcal{X}_1$ mit

$$\lambda_1(Y_i^1) = \lambda_1(Y_i^2) \quad \text{für } i = 1, 2$$

(etwa $Y_i^1 = X_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n, n+\frac{1}{2})$ mit $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$),

so ist $B := (Y_1^1, Y_1^2) + (Y_2^1, Y_2^2) \in R\mathcal{X}_2$ geeignet.

Damit besitzen auch alle offenen Mengen $G \in \mathcal{X}_2$ die fragliche Eigenschaft, da sie als abzählbare Vereinigung disjunkter Intervalle darstellbar sind.

Die zugehörige Menge B ergibt sich dabei jedoch durch eine "Hal-

bierung im Kleinen", und diese Tatsache erklärt die Unmöglichkeit, die allgemeine Richtigkeit der Vermutung zu zeigen, indem eine beliebige Menge $A \in \mathcal{X}_2$ maßgenau durch eine absteigende Folge offener Mengen approximiert wird.

Daneben zeigt [2.5], daß sich A auch nicht notwendigerweise maßgenau durch eine abzählbare Vereinigung von Rechtecken approximieren läßt.

9. Für $\lambda_2(A) > 0$ (sonst ist nichts zu zeigen) enthält

$$\mathcal{L}(A) := \left\{ C \in \mathcal{X}_2 : \lambda_1(C_{x_i}) \leq \frac{1}{2} \lambda_1(A_{x_i}) \text{ } \lambda_1\text{-fast für } i = 1, 2 \right\}$$

jedenfalls eine Menge positiven Maßes.

Denn mit $C_1^n := \{(x_1, x_2) : \frac{n-1}{2} \lambda_1(A_{x_1}) < x_2 \leq \frac{n}{2} \lambda_1(A_{x_1})\} \in \mathcal{X}_2$

und $C_2^n := \{(x_1, x_2) : \frac{n-1}{2} \lambda_1(A_{x_2}) < x_1 \leq \frac{n}{2} \lambda_1(A_{x_2})\} \in \mathcal{X}_2$ gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_1^n > (\{\lambda_1(A_{x_1}) > 0\}, R_1) \text{ und}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_2^n > (R_1, \{\lambda_1(A_{x_2}) > 0\}), \text{ d.h.}$$

$$A \subset \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_1^n \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_2^n \right) + N \text{ mit } \lambda_2(N) = 0.$$

Wegen $\lambda_2(A) > 0$ gilt also mit geeigneten n_1, n_2

$$\lambda_2(C) > 0 \text{ für } C := AC_1^{n_1} C_2^{n_2},$$

wobei C offensichtlich in der Gesamtheit $\mathcal{L}(A)$ liegt.

Davon ausgehend liegt der Versuch nahe, eine zu A geeignete Menge

B mittels transfiniter Induktion zu konstruieren; dafür ist zu zeigen, daß zu einer Menge $C \in \mathcal{L}(A)$ mit $\lambda_2(C) < \frac{1}{2} \lambda_2(A)$ stets eine Obermenge $B \in \mathcal{L}(A)$ mit $\lambda_2(B) > \lambda_2(C)$ existiert.

Diese anschaulich einleuchtende Vermutung ist jedoch unrichtig; das zeigt folgendes einfache Beispiel:

Sei $W_{n_1 n_2} := \{(x_1, x_2) : \frac{n_1-1}{4} < x_1 \leq \frac{n_1}{4}\} \subset R_2$ für $n_i = 1, \dots, 4$ und

$$A := \sum_{1 \leq n_i \leq 4} W_{n_1 n_2}, \quad C := \left(\sum_{1 \leq n_i \leq 3} W_{n_1 n_2} - \sum_{1 \leq n_i \leq 3} W_{nn} \right) + W_{44}.$$

Wegen $\lambda_1(C_{x_i}) = \frac{1}{2}$ für $0 < x_i \leq \frac{3}{4}$ und $\lambda_1(C_{x_i}) = \frac{1}{4}$ für $\frac{3}{4} < x_i \leq 1$ gilt

$C \in \mathcal{L}(A)$ und $\lambda_2(C) < \frac{1}{2} \lambda_2(A)$, während für eine Menge $C + D \in \mathcal{L}(A)$

$$\lambda_1(D_{x_i}) = 0 \text{ für } \lambda_1\text{-fast alle } x_i \in (0, \frac{3}{4}],$$

so daß mit einer geeigneten Nullmenge N

$$D \subset W_{44} + N \subset C + N, \text{ d.h. } \lambda_2(D) = 0.$$

10. Eine notwendige Bedingung für jene Mengen $C \in \mathcal{L}(A)$, die sich zu einer Menge $B \in \mathcal{A}\mathcal{Z}_2$ mit $\lambda_1(B_{x_i}) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \lambda_1(A_{x_i})$ vergrößern lassen, ergibt sich für $\lambda_2(A) < \infty$ folgendermaßen:

Für beliebige Mengen $X_i \in \mathcal{Z}_1$ gilt zunächst λ_1 -fast

$$\lambda_1(B_{x_1} X_2) + \lambda_1(A_{x_1} \overline{X}_2) \geq \lambda_1(B_{x_1}) = \frac{1}{2} \lambda_1(A_{x_1}),$$

$$\lambda_1(C_{x_2} X_1) + \lambda_1(B_{x_2} \overline{X}_1) \leq \lambda_1(B_{x_2}) = \frac{1}{2} \lambda_1(A_{x_2}).$$

Durch Integration dieser Ungleichungen folgt

$$\frac{1}{2} \int_{X_1} \lambda_1(A_{x_1}) d\lambda_1 - \int_{\overline{X}_1} \lambda_1(A_{x_1} \overline{X}_2) d\lambda_1 \leq \int_{X_1} \lambda_1(B_{x_1} X_2) d\lambda_1$$

$$= \int_{X_2} \lambda_1(B_{x_2} \overline{X}_1) d\lambda_1 \leq \frac{1}{2} \int_{X_2} \lambda_1(A_{x_2}) d\lambda_1 - \int_{X_2} \lambda_1(C_{x_2} X_1) d\lambda_1, \text{ d.h.}$$

$$\frac{1}{2} \lambda_2(A(\overline{X}_1, R_1)) - \lambda_2(A(\overline{X}_1, \overline{X}_2)) \leq \frac{1}{2} \lambda_2(A(R_1, X_2)) - \lambda_2(C(X_1, X_2)).$$

Eine einfache Umformung liefert daraus als notwendige Bedingung

$$\lambda_2(C(X_1, X_2)) \leq \frac{1}{2} \lambda_2(A[(X_1, X_2) + (\overline{X}_1, \overline{X}_2)]) \quad \text{für } X_i \in \mathcal{Z}_1.$$

Zum Abschluß der einleitenden Betrachtungen sei darauf hingewiesen, daß diese Ungleichung bei dem Beispiel aus 9. tatsächlich nicht stets erfüllt ist, da hier für $X_i = (0, \frac{3}{4}]$

$$\lambda_2(C(X_1, X_2)) = \frac{6}{16} > \frac{1}{2} \left(\left(\frac{3}{4} \right)^2 + \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \lambda_2(A[(X_1, X_2) + (\overline{X}_1, \overline{X}_2)]).$$

§2. Atomare und atomlose Maße

Zu einer allgemeinen Behandlung des am Schluß von §1 untersuchten Halbierungsproblems werden einige Sätze über atomare und atomlose Maße benötigt.

Vollständigkeitshalber wird zunächst ein kurzer Beweis für folgende bekannte Tatsache angegeben:

Satz 2.1. Ist $(M, \mathcal{K}, \mu)$ ein normaler Maßraum, so existiert eine Zerlegung $M = M_1 + M_2$ in $\mathcal{K}$ derart, daß

$$\mu|_{M_1, \mathcal{K}} \text{ atomar und } \mu|_{M_2, \mathcal{K}} \text{ atomlos.}$$

Beweis. 1. Ist $\mu|_{C_n, \mathcal{K}}$ für $n \in \mathbb{Z}$ atomar (atomlos) und $C = \sum_{\mathbb{Z}} C_n$, so ist auch $\mu|_{C, \mathcal{K}}$ atomar (atomlos); daher genügt der Nachweis der Behauptung für ein endliches Maß.

2. Für zwei Atome $A, A' \in \mathcal{K}$ gilt stets

$$(1) \quad \mu(A \setminus A') = 0 \text{ oder } \mu(A \cup A') = 0;$$

ist also $\mu|_{\mathcal{K}}$ endlich, so enthält $\mathcal{K}$ ein Atom maximalen Maßes.

Denn andernfalls wäre eine Folge von Atomen $B_n \in \mathcal{K}$ vorhanden mit

$$\mu(B_1) < \mu(B_2) < \dots, \text{ so daß wegen (1)}$$

$$\mu(B_m \setminus B_n) = 0 \text{ für } m \neq n, \text{ d.h.}$$

$$\mu(M) \geq \mu\left(\sum_{\mathbb{Z}} B_n\right) = \sum_{\mathbb{Z}} [\mu(B_n) - \mu((B_1 + \dots + B_{n-1}) \setminus B_n)]$$

$$= \sum_{\mathbb{Z}} \mu(B_n) = \infty$$

im Widerspruch zur Endlichkeit von $\mu|_{\mathcal{K}}$.

3. Sei nun A_1 ein Atom maximalen Maßes aus $\mathcal{K}$ und allgemein A_n ein Atom maximalen Maßes aus $(M - \sum_{m=1}^{n-1} A_m) \cap \mathcal{K}$.

$M_1 := \sum_{\mathbb{Z}} A_n$ und $M_2 := M - M_1$ bilden dann eine geeignete Zerlegung:

$\mu|_{M_1, \mathcal{K}}$ ist atomar, da A_n stets auch ein Atom aus $\mathcal{K}$ ist;

$\mu|_{M_2, \mathcal{K}}$ ist atomlos, da für jedes Atom $A_0 \in M_2 \cap \mathcal{K}$ wegen $\mu(A_0) \leq \mu(A_n)$

$$\sum_{\mathbb{Z}} \mu(A_0) \leq \sum_{\mathbb{Z}} \mu(A_n) \leq \mu(M) < \infty, \text{ d.h. } \mu(A_0) = 0. \quad \text{—}$$

Im übrigen ist diese Zerlegung offensichtlich μ -fast eindeutig.

Unter Vermeidung transfiniter Induktion läßt sich zeigen:

Satz 2.2. Ist $(M, \bar{\mathcal{K}}, \mu)$ ein atomloser endlicher Maßraum, so existiert zu $\alpha \in [0, \mu(M)]$ stets eine Menge $A \in \bar{\mathcal{K}}$ mit $\mu(A) = \alpha$.

Beweis. 1. Eine Menge $B \in \bar{\mathcal{K}}$ mit $\mu(B) > 0$ besitzt für $n \in \mathbb{Z}$ stets eine Zerlegung $B = B_1 + \dots + B_n$ in $\bar{\mathcal{K}}$ mit $0 < \min_m \mu(B_m) \leq \frac{1}{n} \mu(B)$; das ergibt:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Zu } B \in \bar{\mathcal{K}} \text{ mit } \mu(B) > 0 \text{ und zu } \varepsilon > 0 \text{ existiert } B_0 \in \bar{\mathcal{K}} \text{ mit} \\ 0 < \mu(B_0) < \varepsilon. \end{array} \right.$$

2. Zu $\alpha \in [0, \mu(M)]$ wird nun eine Folge von Mengen $A_n \in \bar{\mathcal{K}}$ rekursiv definiert durch die Forderung

$$A_n \in \mathcal{A}_n := \left\{ A \in \left(\overline{\sum_{m \leq n} A_m} \right) \bar{\mathcal{K}} : \sum_{m \leq n} \mu(A_m) + \mu(A) \leq \alpha \right\} \neq \emptyset \text{ mit} \\ \mu(A_n) > \sup_{A_n} \mu(A) - 2^{-n}.$$

$A := \sum_2 A_n \in \bar{\mathcal{K}}$ erfüllt also jedenfalls $\mu(A) \leq \alpha$.

Wäre dabei $\varepsilon := \alpha - \mu(A) > 0$ und damit $\mu(\bar{A}) > 0$, so wäre wegen (2) eine Menge $A_0 \in \bar{\mathcal{K}}$ vorhanden mit der Eigenschaft $0 < \mu(A_0) \leq \varepsilon$, so daß also wegen $A_0 \in \sum_2 \mathcal{A}_n$

$$\mu(M) \geq \sum_2 \mu(A_n) \geq \sum_2 (\mu(A_0) - 2^{-n}) = \sum_2 \mu(A_0) - 1 = \infty$$

im Widerspruch zur Endlichkeit von $\mu|_{\bar{\mathcal{K}}}$. ┘

Daß die Atomlosigkeit von $\mu|_{\bar{\mathcal{K}}}$ jedoch für die Konvexität von $\{\mu(A) : A \in \bar{\mathcal{K}}\}$ nicht notwendig ist, zeigt folgendes Beispiel:

Sei $M := \mathbb{Z}$, $\bar{\mathcal{K}} := \{T : T \subset \mathbb{Z}\}$, $\mu(T) := \sum_T 2^{-n}$; dann ist $\{\mu(A) : A \in \bar{\mathcal{K}}\} = [0, 1]$,

da sich jedes $\alpha \in [0, 1]$ als unendliche Dualzahl darstellen läßt.

Allgemein gilt folgendes Kriterium:

Satz 2.3. $(M, \bar{\mathcal{K}}, \mu)$ sei ein endlicher Maßraum und $M = M_1 + M_2$ eine Zerlegung gemäß [2.1]; ferner sei $M_1 = \sum_2 A_n$ eine Zerlegung in Atome $A_n \in \bar{\mathcal{K}}$ - angeordnet nach fallenden Maßen $\alpha_n := \mu(A_n)$.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvexität von $\{\mu(A) : A \in \bar{\mathcal{K}}\}$ ist dann das Bestehen der Ungleichung

$$\alpha_n \leq \frac{1}{2} (\mu(M) - \sum_{m \leq n} \alpha_m) \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. 1. Für $A = A_0 + \sum_T A_m$ mit $A_0 \in M_2 \bar{K}$ und $T \subset Z$ gilt

$$\mu(A) \begin{cases} \geq \alpha_n & \text{für } \{m \in T: m \leq n\} \neq \emptyset \\ \leq \mu(M) - \sum_{m \leq n} \alpha_m & \text{sonst,} \end{cases}$$

B.h. $\{0, \mu(M)\} \subset \{\mu(A): A \in \bar{K}\} \subset [0, \mu(M) - \sum_{m \leq n} \alpha_m] + [\alpha_n, \mu(M)]$.

Aus der Konvexität von $\{\mu(A): A \in \bar{K}\}$ folgt also

$$\alpha_n \leq \mu(M) - \sum_{m \leq n} \alpha_m, \text{ d.h. } \alpha_n \leq \frac{1}{2}(\mu(M) - \sum_{m \leq n} \alpha_m) \text{ für } n \in Z.$$

2. Sei nun umgekehrt diese Ungleichung stets erfüllt.

Zu $\alpha \in [0, \mu(M)]$ wird dann rekursiv eine Menge $T \subset Z$ definiert durch

die Festsetzung

$$n \in T, \text{ falls } \sum_{T \ni m < n} \alpha_m + \alpha_n \leq \alpha.$$

$\alpha := \sum_T A_n \in \bar{K}$ erfüllt also wegen $\alpha \geq 0$ jedenfalls $\mu(A) \leq \alpha$.

Nach Definition von T gilt ferner für $n \notin T$

$$\mu(A) \geq \sum_{T \ni m < n} \alpha_m > \alpha - \alpha_n;$$

Ist also $\bar{T}$ unendlich, so folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

$$\mu(A) \geq \alpha, \text{ d.h. } \mu(A) = \alpha.$$

sondernfalls ist $0 \leq \alpha - \mu(A) \leq \mu(M_2)$;

Wenn für $\bar{T} = 0$ ist, wegen $\alpha \leq \mu(M)$

$$\mu(A) = \sum_Z \alpha_n = \mu(M) - \mu(M_2) \geq \alpha - \mu(M_2),$$

und für $\bar{T} \neq 0$ gilt mit $n := \max \bar{T}$ nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_{T \ni m < n} \alpha_m + \sum_{m > n} \alpha_m \\ &> (\alpha - \alpha_n) + (\mu(M) - \mu(M_2) - \sum_{m \leq n} \alpha_m) \geq \alpha - \mu(M_2). \end{aligned}$$

Daher existiert nach [2.2] eine Menge $A' \in \bar{K}$ mit $\mu(A') = \alpha$. ┘

Häufige Anwendung findet im weiteren Verlauf:

Satz 2.4. Ist $(M, \bar{K}, \mu)$ ein atomloser normaler Maßraum, so existiert eine $\bar{K}$ -meßbare Funktion a/M mit $0 \leq a < \infty$ derart, daß

$$\mu(\{a \in A\}) = \lambda_1(A) \quad \text{für } A \in [0, \mu(M)] \mathcal{L}_1.$$

Beweis. 1. Es genügt die Konstruktion einer Funktion a/M mit

$$\mu(\{a \leq \alpha\}) = \alpha \quad \text{für } 0 \leq \alpha \leq \mu(M);$$

denn die Maße $\mu_1(A) := \mu(\{a \in A\})$ und $\mu_2(A) := \lambda_1(A)$ stimmen dann auf dem Mengenkörper der endlichen Intervallsummen in $[0, \mu(M)]$ und damit wegen ihrer Normalität auf dem σ -Körper $[0, \mu(M)] \mathcal{F}_1$ überein.

2. Sei nun zunächst $\gamma := \mu(M) < \infty$ vorausgesetzt.

Nach [2.2] existieren dann Mengen $A_n^m \in \mathcal{K}$ mit

$$(3) \quad \begin{cases} \mu(A_n^m) = 2^{-n} \cdot \gamma \text{ und } A_n^m = A_{n+1}^{2m-1} + A_{n+1}^{2m} \\ \text{für } m = 1, \dots, 2^n \text{ und } n \geq 0 \text{ (} A_0^1 := M \text{).} \end{cases}$$

$$a(x) := \gamma \inf_{n \geq 0} \sum_{1 \leq m \leq 2^n} \frac{m}{2^n} \chi_{A_n^m}(x)$$

ist dann eine $\mathcal{K}$ -meßbare Funktion mit

$$\sum_{1 \leq m \leq 2^n} A_n^1 \subset \{a \leq \frac{m}{2^n} \cdot \gamma\} \subset \sum_{1 \leq m+1} A_n^1.$$

Für eine Dualzahl $\vartheta = \frac{m}{2^n}$ mit $0 \leq m \leq 2^n$ gilt daher wegen (3)

$$\vartheta \gamma = \sum_{1 \leq m} \mu(A_n^1) \leq \mu(\{a \leq \vartheta \gamma\}) \leq \sum_{1 \leq m+1} \mu(A_n^1) = (\vartheta + \frac{1}{2^n}) \cdot \gamma;$$

da n in der Darstellung $\vartheta = \frac{m}{2^n}$ beliebig groß wählbar ist, gilt also

$$\mu(\{a \leq \vartheta \gamma\}) = \vartheta \gamma \quad \text{für jede endliche Dualzahl } \vartheta \in [0, 1].$$

Daraus folgt wegen der Stetigkeit beider Seiten von rechts

$$\mu(\{a \leq \alpha\}) = \alpha \quad \text{für } 0 \leq \alpha \leq \mu(M).$$

3. Sei nun $\mu|_{\mathcal{K}}$ atomlos mit der normalen Zerlegung $M = \sum_{\mathbb{N}} M_n$; dann existieren also $M_n \mathcal{K}$ -meßbare Funktionen $a_n|_{M_n}$ mit

$$\mu(\{a_n \leq \alpha\}) = \alpha \quad \text{für } 0 \leq \alpha \leq \mu(M_n).$$

$$a(x) := \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(M_m) + a_m(x) \quad \text{für } x \in M_n$$

besitzt dann die geforderten Eigenschaften. ┘

Ist $a|M$ eine derartige Funktion, so ist $h(\alpha) := \mu(A_\bullet \{a \leq \alpha\})$ für $A_\bullet \in \mathcal{K}$ stetig mit $0 = h(0) \leq \lim_{\alpha \rightarrow \mu(M)} h(\alpha) = \mu(A_\bullet)$;

daher folgt umgekehrt aus der Existenz einer solchen Funktion stets die Atomlosigkeit von $\mu|_{\mathcal{K}}$.

Nun läßt sich die in §1 bereits erwähnte Tatsache beweisen:

Satz 2.5. $(M, \mathcal{K}, \mu)$ sei der Produktraum zweier normaler Maßräume $(M_i, \mathcal{K}_i, \mu_i)$.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zu $A \in \mathcal{K}$ stets Rechtecke $R^n = (X_1^n, X_2^n) \in \mathcal{K}$ existieren mit $\mu(A \div \sum_{\mathbb{Z}} R^n) = 0$, ist dann die Atomarität von mindestens einem der Maße $\mu_i | \mathcal{K}_i$.

Beweis. 1. Sei zunächst etwa $\mu_1 | \mathcal{K}_1$ atomar und $M_1 = \sum_{\mathbb{Z}} X_1^n$ eine zugehörige Zerlegung in Atome.

Für eine Menge $A \in \mathcal{K}$ ist dann wegen $A_{x_2} X_1^n = (A(X_1^n, M_2))_{x_2}$ die Funktion $h(x_2) := \mu_1(A_{x_2} X_1^n)$ $\mathcal{K}_2$ -meßbar, d.h.

$$X_2^n := \{x_2 \in M_2 : \mu_1(A_{x_2} X_1^n) > 0\} \in \mathcal{K}_2 \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

Da nun X_1^n ein Atom ist, gilt dabei

$$\mu_1(\overline{A_{x_2}} X_1^n) = 0 \text{ für } x_2 \in X_2^n \text{ und } \mu_1(A_{x_2} X_1^n) = 0 \text{ für } x_2 \in \overline{X_2^n}.$$

Das liefert wegen $(\overline{A})_{x_2} = \overline{A_{x_2}}$ die geforderte Gleichung

$$\mu(A \div \sum_{\mathbb{Z}} (X_1^n, X_2^n)) = \sum_{\mathbb{Z}} \mu(A(X_1^n, M_2) \div (X_1^n, X_2^n))$$

$$= \sum_{\mathbb{Z}} \left[\int_{X_2^n} \mu_1(\overline{A_{x_2}} X_1^n) d\mu_2 + \int_{\overline{X_2^n}} \mu_1(A_{x_2} X_1^n) d\mu_2 \right] = 0.$$

2. Zum indirekten Beweis der Notwendigkeit der Bedingung

genügt es auf Grund von [2.1] offenbar, folgendes zu zeigen:

Sind $(M_i, \mathcal{K}_i, \mu_i)$ zwei atomlose Maßräume mit $\mu_i(M_i) = 1$, so enthält $\mathcal{K}$ eine Menge A mit $\mu(A) > 0$ derart, daß

$$\mu(\overline{A}(X_1, X_2)) > 0, \text{ falls } \mu_i(X_i) > 0 \text{ für } i = 1, 2.$$

Zur Konstruktion einer derartigen Menge A sei $a_i | M_i$ eine Funktion zu $\mu_i | \mathcal{K}_i$ mit den Eigenschaften von [2.4].

Mit $X_i^n := \sum_{1 \leq m \leq n!} \left\{ \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} < a_i \leq \frac{m}{n!} \right\}$ für $n \in \mathbb{Z}$ sei dann

$$A := \sum_{\mathbb{Z}} (X_1^n, X_2^n) \in \mathcal{K}.$$

Dabei gilt $\mu_i(X_i^n) = \sum_{1 \leq m \leq n!} \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$ und allgemein

$$(4) \quad \mu_i(\overline{\prod_{k \leq l} X_i^{n_k}}) = \prod_{k \leq l} \mu_i(\overline{X_i^{n_k}}) \quad \text{für } n_1 < \dots < n_l.$$

Daraus folgt zunächst

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\overline{\prod_{m \leq n} (X_1^m, X_2^m)}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m \leq n} \mu'(\overline{(X_1^m, X_2^m)}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m \leq n} \left(1 - \frac{1}{(m+1)^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m \leq n} \frac{m(m+2)}{(m+1)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2} > 0. \end{aligned}$$

3. Es wird nun folgendes Kriterium benötigt:

$$(5) \quad \mu_i(\prod_T \overline{X_i^n}) = 0 \text{ ist gleichwertig mit } \sum_T \frac{1}{n} = \infty.$$

Für endliches T gilt keine der beiden Aussagen, während für

$T = \{n_1, n_2, \dots\}$ mit $n_1 < n_2 < \dots$ wegen (4)

$$\mu_i(\prod_T \overline{X_i^n}) = \lim_{l \rightarrow \infty} \mu_i(\prod_{k \leq l} \overline{X_i^{n_k}}) = \lim_{l \rightarrow \infty} \prod_{k \leq l} (1 - \frac{1}{n_k+1});$$

da nun für $0 \leq \alpha_n < 1$ das Produkt $\prod (1 - \alpha_n)$ genau dann gegen 0 divergiert, wenn die Reihe $\sum \alpha_n$ gegen ∞ divergiert, gilt also

$$\mu_i(\prod_T \overline{X_i^n}) = 0 \text{ genau für } \sum_T \frac{1}{n+1} = \infty,$$

d.h. - wegen $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ - genau für $\sum_T \frac{1}{n} = \infty$.

4. Seien nun $X_i \in \mathcal{K}_i$ Mengen mit $\mu_i(X_i) > 0$.

Zum Nachweis von $\mu(\overline{A}(X_1, X_2)) > 0$ wird dann definiert

$$T_i := \{n \in \mathbb{Z} : \mu_i(X_i X_i^n) = 0\}.$$

$$\text{Da } 0 < \mu_i(X_i) = \mu_i(X_i (\sum_{T_i} X_i^n + \prod_{T_i} \overline{X_i^n}))$$

$$\leq \sum_{T_i} \mu_i(X_i X_i^n) + \mu_i(\prod_{T_i} \overline{X_i^n}) = 0 + \mu_i(\prod_{T_i} \overline{X_i^n}),$$

gilt also wegen (5) $\sum_{T_i} \frac{1}{n} < \infty$ für $i = 1, 2$, so daß auf Grund der Divergenz der harmonischen Reihe $T_1 + T_2 \neq \mathbb{Z}$.

Für $n \in \overline{T_1} \overline{T_2} \neq 0$ gilt daher nach Definition von T_i

$$\begin{aligned} \mu(\overline{A}(X_1, X_2)) &\geq \mu((X_1^n, X_2^n)(X_1, X_2)) \\ &= \mu_1(X_1 X_1^n) \mu_2(X_2 X_2^n) > 0. \end{aligned}$$

Abschließend sei bemerkt, daß der Beweis sogar folgende schärfere Aussage ermöglicht:

Ist $\mu_i|_{\mathcal{K}_i}$ für $i = 1, 2$ normal und nicht atomar, so existiert stets eine Rechteckssumme $S = \sum_{\overline{S}} (X_1^n, X_2^n) \in \mathcal{K}$ mit $\mu(\overline{S}) > 0$ derart, daß

$$\mu(S(X_1, X_2)) > 0, \text{ falls } \mu_i(X_i) > 0 \text{ für } i = 1, 2.$$

§3. Endgültige Formulierung des Hauptproblems

Das in §1 formulierte Problem lautet für zwei beliebige Maßräume $(M_i, \mathcal{K}_i, \mu_i)$ mit dem Produktraum $(M, \mathcal{K}, \mu)$:

Wann existiert zu einer Menge $A \in \mathcal{K}$ eine Menge $B \in \mathcal{A}\mathcal{K}$ mit

$$\mu_2(B_{x_1}) \stackrel{!}{=} \frac{1}{\mu_1} \int \mu_2(A_{x_1}) \text{ und } \mu_1(B_{x_2}) \stackrel{!}{=} \frac{1}{\mu_2} \int \mu_1(A_{x_2})?$$

Dabei sind die Maße $\mu_i | \mathcal{K}_i$ als normal vorauszusetzen, damit der Produktraum $(M, \mathcal{K}, \mu)$ tatsächlich definiert ist.

Um einer Lösung dieses Problems näher zu kommen, empfiehlt sich zunächst eine allgemeine Untersuchung der Gesamtheit der Paare

$(\mu_2(B_{x_1}), \mu_1(B_{x_2}))$ mit $B \in \mathcal{A}\mathcal{K}$, die im folgenden kurz als die

"Schnittmaß-Funktionen" der Menge B bezeichnet werden.

Diese Gesamtheit wird bei μ_i -fast endlichen Schnittmaß-Funktionen von A betrachtet als Teilmenge des Raumes $(\mathcal{M}(\mu_1), \mathcal{M}(\mu_2))$ mit dem Abstand

$$\|(f_1^1, f_1^2), (f_2^1, f_2^2)\| := \sum_{i=1,2} \int_{M_i} |f_i^1 - f_i^2| d\mu_i \quad (\leq \infty)$$

und bei endlichem Maß von A auch als Teilmenge des Raumes

$(\mathcal{L}(\mu_1), \mathcal{L}(\mu_2))$ mit dem Konvergenzbegriff

$$(f_1^1, f_2^1) \rightarrow (f_1, f_2) \text{ genau dann, wenn } f_i^1 \rightarrow f_i \text{ für } i = 1, 2.$$

Ist nun etwa $\mu_2 | \mathcal{K}_2$ atomlos, so liegt die Vermutung nahe, daß jede

$\mathcal{K}_1$ -meßbare Funktion $f_1 | M_1$ mit

$$0 \leq f_1(x_1) \leq \mu_2(A_{x_1}) \quad \text{für } x_1 \in M_1$$

erste Schnittmaß-Funktion einer geeigneten Menge $B \in \mathcal{A}\mathcal{K}$ ist -

daß sich also eine der Schnittmaß-Funktionen im wesentlichen beliebig vorgeben läßt, falls das betreffende Maß atomlos ist.

Das ergibt sich tatsächlich aus einem etwas allgemeineren Satz, der im folgenden benötigt wird:

Satz 3.1. $(M, \mathcal{K}, \mu)$ sei der Produktraum zweier normaler Maßräume

$(M_i, \mathcal{K}_i, \mu_i)$; dabei sei das Maß $\mu_2 | \mathcal{K}_2$ atomlos.

Ist dann $g|M$ eine $\bar{\mathcal{K}}$ -meßbare Funktion mit $0 \leq g \leq f < \infty$ und $f_1 \in \mathcal{M}(\mu_1)$ mit $0 \leq f_1(x_1) \leq \int_{M_2} g(x_1, x_2) d\mu_2$ für $x_1 \in M_1$,

so existiert eine Menge $A \in \bar{\mathcal{K}}$ mit

$$\int_{M_2} \chi_A g(x_1, x_2) d\mu_2 = f_1(x_1) \quad \text{für alle } x_1.$$

Beweis. 1. Da $\mu_2|_{\bar{\mathcal{K}}_2}$ atomlos und normal ist, existiert eine $\bar{\mathcal{K}}_2$ -meßbare Funktion $a_2|M_2$ zu $\mu_2|_{\bar{\mathcal{K}}_2}$ mit den Eigenschaften von [2.4].

Sei nun $h_\alpha(x_1) := \int_{\{a_2 \leq \alpha\}} g(x_1, x_2) d\mu_2$ für $0 \leq \alpha < \infty$.

Dann ist $h_\alpha(x_1)$ für festes α eine $\bar{\mathcal{K}}_1$ -meßbare Funktion von x_1 .

Daneben ist $h_\alpha(x_1)$ für festes x_1 eine stetige Funktion von α , da für $\delta > 0$

$$h_\alpha(x_1) \leq h_{\alpha+\delta}(x_1) = h_\alpha(x_1) + \int_{\{\alpha < a_2 \leq \alpha+\delta\}} g(x_1, x_2) d\mu_2 \leq h_\alpha(x_1) + \delta f.$$

Ferner gilt wegen $\mu_2(\{a_2 \leq 0\}) = 0$ und $\mu_2(\{a_2 = \infty\}) = 0$

$$(6) \quad h_0(x_1) = 0 \leq f_1(x_1) \leq \int_{M_2} g(x_1, x_2) d\mu_2 = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} h_\alpha(x_1) \quad \text{für } x_1 \in M_1.$$

$$2. \quad A := \sum_{\alpha \text{ rational}} (\{h_\alpha \leq f_1\}, \{a_2 \leq \alpha\})$$

besitzt nun die geforderten Eigenschaften.

Denn wegen $\{h_\alpha \leq f_1\} \in \bar{\mathcal{K}}_1$ ist jedenfalls $A \in \bar{\mathcal{K}}$.

Da die Mengen $\{a_2 \leq \alpha\}$ bzgl. " $<$ " linear geordnet sind, gilt ferner

$$\int_{M_2} \chi_A g(x_1, x_2) d\mu_2 = \sup_{\{a_2 \leq \alpha\}} \int_{M_2} g(x_1, x_2) d\mu_2,$$

wobei das Supremum über alle rationalen α mit $h_\alpha(x_1) \leq f_1(x_1)$ zu bilden ist, d.h.

$$\int_{M_2} \chi_A g(x_1, x_2) d\mu_2 = \sup \{h_\alpha(x_1) : \alpha \text{ rational, } h_\alpha(x_1) \leq f_1(x_1)\}.$$

Da die rationalen Zahlen dicht liegen, folgt daraus wegen (6) und der Stetigkeit von $h_\alpha(x_1)$ in α die Behauptung. ┘

Es ist leicht einzusehen, daß die Atomlosigkeit von $\mu_2|_{\bar{\mathcal{K}}_2}$ eine notwendige Voraussetzung dieses Satzes ist.

Sind nun zu der Menge $A \in \bar{\mathcal{K}}$ zwei Funktionen $f_i \in \mathcal{M}(\mu_i)$ gegeben, so lassen sich für die Existenz einer Menge $B \in A \bar{\mathcal{K}}$ mit den Schnittmaß-Funktionen (f_1, f_2) sofort nachstehende Bedingungen angeben:

$$\int_{M_1} f_1 d\mu_1 = \int_{M_2} f_2 d\mu_2 \quad \text{und}$$

$$0 \leq f_1(x_1) \leq \mu_2(A_{x_1}) \quad \mu_1\text{-fast}, \quad 0 \leq f_2(x_2) \leq \mu_1(A_{x_2}) \quad \mu_2\text{-fast}.$$

Daß diese Bedingungen nicht genügen, zeigt folgendes Beispiel:

Sei $(M_i, \mathcal{K}_i, \mu_i)$ für $i = 1, 2$ der atomlose normale Maßraum $(R_i, \mathcal{K}_i, \lambda_i)$ und $A := ([0, 1], [0, 1])$, $f_i := \chi_{[0, \frac{1}{2}]}$.

Hier sind zwar die angegebenen Bedingungen erfüllt, doch ergibt

$$\lambda_1(B_{x_1}) = 1 \quad \text{für } \lambda_1\text{-fast alle } x_1 \in [0, \frac{1}{2}], \text{ falls } B < A,$$

$$\lambda_2((A-B)([0, \frac{1}{2}], [0, 1])) = 0, \text{ so daß}$$

$$\lambda_1(B_{x_2}) \geq \frac{1}{2} \quad \text{für } \lambda_1\text{-fast alle } x_2 \in [0, 1].$$

Eine zusätzliche Bedingung läßt sich auf folgende Weise gewinnen:

Besitzt $B \in A\mathcal{K}$ die Schnittmaß-Funktionen (f_1, f_2) , so gilt

$$\begin{aligned} \int_{X_1} f_1 d\mu_1 &= \mu(B(X_1, M_2)) \leq \mu(B(X_1, X_2)) + \mu(B(M_1, \bar{X}_2)) \\ &\leq \mu(A(X_1, X_2)) + \int_{\bar{X}_2} f_2 d\mu_2 \quad \text{für } X_i \in \mathcal{K}_i. \end{aligned}$$

Zusammen mit der durch Vertauschung von 1 und 2 entstehenden Ungleichung führt das zu der notwendigen Bedingung

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} \text{I} \quad \int_{X_1} f_1 d\mu_1 \leq \mu(A(X_1, X_2)) + \int_{\bar{X}_2} f_2 d\mu_2 \\ \text{II} \quad \int_{X_2} f_2 d\mu_2 \leq \mu(A(X_1, X_2)) + \int_{\bar{X}_1} f_1 d\mu_1 \end{array} \right\} \quad \text{für } X_i \in \mathcal{K}_i.$$

Trotz der einfachen Ableitung folgen aus diesen beiden Ungleichungen bereits alle weiter oben angegebenen Bedingungen.

Denn $X_1 = M_1$, $X_2 = 0$ in (A)I und $X_2 = M_2$, $X_1 = 0$ in (A)II ergibt

$$\int_{M_1} f_1 d\mu_1 \leq \int_{M_2} f_2 d\mu_2 \leq \int_{M_1} f_1 d\mu_1;$$

für $X_2 = M_2$ in (A)I und $X_2 = 0$ in (A)II folgt ferner

$$\int_{X_1} f_1 d\mu_1 \leq \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1}) d\mu_1 \quad \text{und} \quad 0 \leq \int_{\bar{X}_1} f_1 d\mu_1 \quad \text{für } X_i \in \mathcal{K}_i$$

und daraus, da Entsprechendes für $f_2|_{M_2}$ gilt,

$$0 \leq f_1(x_1) \leq \mu_2(A_{x_1}) \quad \mu_1\text{-fast}, \quad 0 \leq f_2(x_2) \leq \mu_1(A_{x_2}) \quad \mu_2\text{-fast}.$$

Um entscheiden zu können, ob die Bedingung (A) auch hinreichend ist, ist eine nochmalige und endgültige Erweiterung der Problemstellung von meßbaren Mengen auf meßbare Funktionen erforderlich:

Für eine feste nicht-negative $\bar{\kappa}$ -meßbare Funktion $g|M$ ist die Gesamtheit der Paare $(\int_{M_2} f(x_1, x_2) d\mu_2, \int_{M_1} f(x_1, x_2) d\mu_1)$ zu untersuchen, die sich für $\bar{\kappa}$ -meßbare Funktionen $f|M$ mit $0 \leq f \leq g$ ergeben. Als notwendige Bedingung dafür, daß $(f_1, f_2) \in (\mathcal{M}(\mu_1), \mathcal{M}(\mu_2))$ dieser Gesamtheit angehört, folgt dann in Analogie zu (A):

$$(G) \left\{ \begin{array}{l} \text{I} \quad \int_{X_1} f_1 d\mu_1 \leq \int_{(X_1, X_2)} g d\mu + \int_{\bar{X}_2} f_2 d\mu_2 \\ \text{II} \quad \int_{X_2} f_2 d\mu_2 \leq \int_{(X_1, X_2)} g d\mu + \int_{\bar{X}_1} f_1 d\mu_1 \end{array} \right\} \text{ für } X_i \in \bar{\kappa}_i.$$

Es ist nun zweckmäßig, für $f_i \in \mathcal{M}(\mu_i)$ - bei festen Maßen $\mu_i | \bar{\kappa}_i$ - folgende Mengenfunktionen auf $\bar{\kappa}_i$ einzuführen:

$$\varphi_1(X_1; g, f_2) := \int_{M_2} \min\{f_2(x_2), \int_{X_1} g(x_1, x_2) d\mu_1\} d\mu_2,$$

$$\varphi_2(X_2; g, f_1) := \int_{M_1} \min\{f_1(x_1), \int_{X_2} g(x_1, x_2) d\mu_2\} d\mu_1;$$

diese Funktionen sind definiert, da die Integranden jeweils in $\mathcal{M}(\mu_i)$ liegen.

Mit ihrer Hilfe läßt sich die Bedingung (G) umformen:

Satz 3.2. 1. Die Bedingung (G) ist gleichwertig mit

$$\int_{X_1} f_1 d\mu_1 \leq \varphi_1(X_1; g, f_2) \quad \text{für } X_1 \in \bar{\kappa}_1,$$

$$\int_{X_2} f_2 d\mu_2 \leq \varphi_2(X_2; g, f_1) \quad \text{für } X_2 \in \bar{\kappa}_2.$$

2. Für $\int_M g d\mu < \infty$ ist die Bedingung (G) gleichwertig mit

$$\int_{M_1} f_1 d\mu_1 = \int_{M_2} f_2 d\mu_2 =: \gamma \quad \text{und}$$

$$\gamma \leq \int_{(X_1, X_2)} g d\mu + \sum_{i=1,2} \int_{\bar{X}_i} f_i d\mu_i \quad \text{für } X_i \in \bar{\kappa}_i.$$

Beweis. 1. Die Behauptung folgt beispielsweise für die erste Ungleichung aus

$$\begin{aligned} & \min_{X_2 \in \bar{\kappa}_2} \left(\int_{(X_1, X_2)} g d\mu + \int_{\bar{X}_2} f_2 d\mu_2 \right) \\ &= \min_{X_2 \in \bar{\kappa}_2} \int_{M_2} [\chi_{X_2}(x_2) \int_{X_1} g(x_1, x_2) d\mu_1 + \chi_{\bar{X}_2}(x_2) \cdot f_2(x_2)] d\mu_2 \\ &= \int_{M_2} \min \left\{ \int_{X_1} g(x_1, x_2) d\mu_1, f_2(x_2) \right\} d\mu_2 = \varphi_1(X_1; g, f_2). \end{aligned}$$

2. Aus (G) folgt jedenfalls $\int_{M_1} f_1 d\mu_1 = \int_{M_2} f_2 d\mu_2$;

Addition von $\int_{\bar{X}_i} f_i d\mu_i$ auf beiden Seiten der i-ten Ungleichung in (G) ergibt die angegebene Ungleichung.

Umgekehrt folgt aus $\int_{M_i} f_i d\mu_i \leq \int_{(X_1, X_2)} g d\mu + \sum_{i=1,2} \int_{\bar{X}_i} f_i d\mu_i$

Durch Subtraktion von $\int_{\bar{X}_i} f_i d\mu_i$ ($\leq \int_{M_i} f_i d\mu_i \leq \int_{(X_1, X_2)} g d\mu + \infty$)

auf beiden Seiten die i-te Ungleichung in (G). ┘

Es sei noch darauf hingewiesen, daß $\varphi_i | \bar{K}_i$ ein äußeres Maß ist;

Denn es gilt mit den Abkürzungen

$$\varphi_1(X_1) = \varphi_1(X_1; g, f_2) \text{ bzw. } \varphi_2(X_2) = \varphi_2(X_2; g, f_1):$$

$$0 = \varphi_i(0) \leq \varphi_i(X_i) \quad \text{für } X_i \in \bar{K}_i,$$

$$\varphi_i(X_i) \leq \varphi_i(X_i') \quad \text{für } X_i \subset X_i',$$

$$\varphi_i\left(\sum_n X_i^n\right) \leq \sum_n \varphi_i(X_i^n) \quad \text{für } X_i^n \in \bar{K}_i.$$

Beim Beweis der letzten Ungleichung etwa für $i = 1$ ist lediglich zu beachten, daß

$$\min\{\alpha, \sum_n \beta_n\} \leq \sum_n \min\{\alpha, \beta_n\} \quad \text{für } \alpha, \beta_n \geq 0$$

und daher wegen $f_2 \in \mathcal{M}(\mu_2)$ mit $g_n(x_2) := \min\{f_2(x_2), \int_{X_1^n} g(x_1, x_2) d\mu_1\}$

$$\min\{f_2(x_2), \sum_n \int_{X_1^n} g(x_1, x_2) d\mu_1\} \leq \sum_n g_n(x_2) \quad \mu_2\text{-fast,}$$

wobei nach dem Satz über die Integration bei monotoner Konvergenz

$$\int_{M_2} \left(\sum_n g_n\right) d\mu_2 = \sum_n \int_{M_2} g_n d\mu_2.$$

§4. Der Fall endlicher Grundmengen

Das in §3 formulierte Hauptproblem wird zunächst behandelt für den Produktraum $(M, \bar{\mu}, \mu)$ zweier Maßräume $(M_i, \bar{\mu}_i, \mu_i)$ mit

$$M_i = \{x_i^1, \dots, x_i^{k_i}\}, \quad \bar{\mu}_i = \{X_i: X_i \subset M_i\}, \quad 0 < \mu_i(\{x_i^{k_i}\}) < \infty.$$

Gegeben seien also Funktionen $g|M$ und $f_i|M_i$ mit $0 \leq f_i, g < \infty$, die der Bedingung (G) genügen; gesucht sind Funktionen $f|M$ mit

$$0 \leq f \leq g \text{ und } \int_{M_2} f(x_1, x_2) d\mu_2 = f_1(x_1), \quad \int_{M_1} f(x_1, x_2) d\mu_1 = f_2(x_2^i).$$

Wird für $k_i = 1, \dots, l_i$ abkürzend gesetzt

$$s_i(k_i) := \mu_i(\{x_i^{k_i}\}) \cdot f_i(x_i^{k_i}), \quad t(k_1, k_2) := \mu(\{(x_1^{k_1}, x_2^{k_2})\}) \cdot g(x_1^{k_1}, x_2^{k_2}),$$

so führt dieses Problem offensichtlich zu folgender Frage:

Gegeben sind Funktionen $t(k_1, k_2)$ und $s_i(k_i)$ mit

$$0 \leq s_i(k_i), t(k_1, k_2) < \infty \quad \text{für } k_i = 1, \dots, l_i;$$

ist dann die Bedingung

$$(T) \left\{ \begin{array}{l} \text{I } \sum_{k_1} s_1(k_1) \leq \sum_{(k_1, k_2)} t(k_1, k_2) + \sum_{k_2} s_2(k_2) \\ \text{II } \sum_{k_2} s_2(k_2) \leq \sum_{(k_1, k_2)} t(k_1, k_2) + \sum_{k_1} s_1(k_1) \end{array} \right\} \text{ für } k_i \in \{1, \dots, l_i\}$$

hinreichend für die Existenz einer Funktion $s(k_1, k_2)$ mit

$$0 \leq s(k_1, k_2) \leq t(k_1, k_2) \quad \text{und}$$

$$\sum_{k_2} s(k_1, k_2) = s_1(k_1), \quad \sum_{k_1} s(k_1, k_2) = s_2(k_2) \quad \text{für } k_i = 1, \dots, l_i?$$

Die Notwendigkeit dieser Bedingung wurde bereits in §3 bewiesen;

doch folgt sie auch leicht direkt, da beispielsweise

$$\begin{aligned} \sum_{k_1} s_1(k_1) &= \sum_{k_1} \sum_{k_2} s(k_1, k_2) \leq \sum_{(k_1, k_2)} s(k_1, k_2) + \sum_{k_1} \sum_{k_2} s(k_1, k_2) \\ &\leq \sum_{(k_1, k_2)} t(k_1, k_2) + \sum_{k_2} s_2(k_2). \end{aligned}$$

Gilt also in (T)I Gleichheit für ein Paar (K_1^0, K_2^0) , so bedeutet

das für eine Lösung $s(k_1, k_2)$ insbesondere $\sum_{(K_1^0, K_2^0)} s(k_1, k_2) = 0$;

ist daher die Bedingung (T) auch hinreichend, so müssen die beiden Ungleichungen in diesem Fall bestehen bleiben, falls $t(k_1, k_2)$ für $(k_1, k_2) \in (\bar{K}_1^0, \bar{K}_2^0)$ durch 0 ersetzt wird.

Diese Folgerung erweist sich als richtig; denn in später benötigter Allgemeinheit gilt:

Satz 4.1. Für die Funktionen $s_i(k_i)$ und $t(k_1, k_2)$ sei die Bedingung (T) erfüllt, wobei $0 \leq s_i(k_i), t(k_1, k_2) \leq \infty$ für $k_i = 1, \dots, l_i$.

Besteht dann für ein Paar (K_1^0, K_2^0) Gleichheit

in (T)I mit $\sum_{K_1^0} s_1(k_1) < \infty$ oder in (T)II mit $\sum_{K_2^0} s_2(k_2) < \infty$,

so gilt die Bedingung (T) auch für $s_i(k_i)$ und $t'(k_1, k_2)$ mit

$t'(k_1, k_2) := 0$ für $(k_1, k_2) \in (\overline{K_1^0}, \overline{K_2^0})$, $t'(k_1, k_2) := t(k_1, k_2)$ sonst.

Beweis. 1. Es wird folgende Gleichung für $K_i \in \{1, \dots, l_i\}$ benötigt:

$$(7) \quad \begin{cases} \chi_{(K_1 + K_1^0, K_2 + K_2^0)} + \chi_{(K_1 K_1^0, K_2 K_2^0)} - \chi_{(K_1^0, K_2^0)} + \chi_{(\overline{K_1}, \overline{K_2})} \\ = \chi_{(K_1, K_2)} - \chi_{(K_1 \overline{K_1^0}, K_2 \overline{K_2^0})}. \end{cases}$$

Sei nun etwa $\sum_{K_1^0} s_1(k_1) = \sum_{(K_1^0, K_2^0)} t(k_1, k_2) + \sum_{K_2^0} s_2(k_2) < \infty$.

2. Dann gelten die folgenden Ungleichungen:

$$\sum_{K_1 \cdot K_1^0} s_1(k_1) \leq \sum_{(K_1 K_1^0, K_2 + K_2^0)} t(k_1, k_2) + \sum_{\overline{K_2}, \overline{K_2^0}} s_2(k_2) \quad (\text{wegen (T)I})$$

$$\sum_{K_1 + K_1^0} s_1(k_1) \leq \sum_{(K_1 + K_1^0, K_2 K_2^0)} t(k_1, k_2) + \sum_{\overline{K_2} + \overline{K_2^0}} s_2(k_2) \quad (\text{wegen (T)I})$$

$$-\sum_{K_1^0} s_1(k_1) = -\sum_{(K_1^0, K_2^0)} t(k_1, k_2) - \sum_{K_2^0} s_2(k_2) \quad (\text{nach Voraussetzung})$$

$$0 \leq \sum_{(\overline{K_1}, \overline{K_2}, \overline{K_2^0})} t(k_1, k_2) \quad (\text{wegen } t(k_1, k_2) \geq 0).$$

Da die negativen Glieder endlich sind, lassen sich diese Ungleichungen addieren; für $s_i(k_i)$ und $t'(k_1, k_2)$ gilt also wegen (7) und

$$\chi_{K_1 + K_1^0} + \chi_{K_1 K_1^0} = \chi_{K_1} + \chi_{K_1^0}, \quad \chi_{\overline{K_2} + \overline{K_2^0}} + \chi_{\overline{K_2}, \overline{K_2^0}} = \chi_{\overline{K_2}} + \chi_{\overline{K_2^0}}$$

$$\sum_{K_1} s_1(k_1) \leq \sum_{(K_1, K_2)} t'(k_1, k_2) + \sum_{\overline{K_2}} s_2(k_2),$$

d.h. (T)I ist für beliebige Mengen K_i erfüllt.

3. Ferner gelten die folgenden Ungleichungen:

$$\sum_{K_1 K_1^0} s_1(k_1) \leq \sum_{(K_1 K_1^0, K_2 + K_2^0)} t(k_1, k_2) + \sum_{\overline{K_2}, \overline{K_2^0}} s_2(k_2) \quad (\text{wegen (T)I})$$

$$\sum_{K_2 K_2^0} s_2(k_2) \leq \sum_{(K_1 + K_1^0, K_2 K_2^0)} t(k_1, k_2) + \sum_{\overline{K_1}, \overline{K_1^0}} s_1(k_1) \quad (\text{wegen (T)II})$$

$$\sum_{K_2^0} s_2(k_2) = -\sum_{(K_1^0, K_2^0)} t(k_1, k_2) + \sum_{K_1^0} s_1(k_1) \quad (\text{nach Voraussetzung})$$

$$0 \leq \sum_{(\overline{K_1}, \overline{K_2}, \overline{K_2^0})} t(k_1, k_2) \quad (\text{wegen } t(k_1, k_2) \geq 0).$$

Addition dieser Ungleichungen und anschließende Subtraktion von $\sum_{K_1 K_1^0} s_1(k_1) + \sum_{K_2 K_2^0} s_2(k_2) < \infty$ auf beiden Seiten ergibt wie bei (T)I wegen

$$\chi_{K_2^0} + \chi_{K_2 K_1^0} = \chi_{K_2} + \chi_{K_2 K_2^0}, \quad \chi_{K_1^0} + \chi_{K_1 K_2^0} = \chi_{K_1} + \chi_{K_1 K_1^0}$$

$$\sum_{K_2} s_2(k_2) \leq \sum_{(K_1, K_2)} t'(k_1, k_2) + \sum_{K_1} s_1(k_1),$$

d.h. (T)II ist für beliebige Mengen K_i erfüllt. ┘

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich nun zeigen, daß (T) tatsächlich auch eine hinreichende Bedingung ist:

Satz 4.2. Sei $0 \leq s_i(k_i), t(k_1, k_2) < \infty$ für $k_i = 1, \dots, l_i$.

Erfüllen dann $s_i(k_i)$ und $t(k_1, k_2)$ die Bedingung (T), so existiert eine Funktion $s(k_1, k_2)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq s(k_1, k_2) \leq t(k_1, k_2) \quad \text{und} \\ \sum_{k_1} s(k_1, k_2) = s_1(k_2), \quad \sum_{k_2} s(k_1, k_2) = s_2(k_1) \end{array} \right\} \text{für } k_i = 1, \dots, l_i.$$

Beweis. 1. Bei festem l_i wird vollständige Induktion nach der Anzahl $n(T)$ nicht-verschwindender Elemente der Matrix $T = (t(k_1, k_2))$ durchgeführt.

Für $n(T) = 0$ ist also $t(k_1, k_2)$ stets Null, so daß wegen

$$s_1(k_1) \leq \sum_{k_2} t(k_1, k_2) \quad (K_1 = \{k_1\}, K_2 = \{1, \dots, l_2\} \text{ in (T)I})$$

$$s_2(k_2) \leq \sum_{k_1} t(k_1, k_2) \quad (K_2 = \{k_2\}, K_1 = \{1, \dots, l_1\} \text{ in (T)II})$$

auch $s_i(k_i)$ stets Null ist; $s(k_1, k_2) = 0$ ist also eine Lösung.

2. Sei nun $n(T) > 0$ und die Behauptung für Funktionen $s_i'(k_i)$ und $t'(k_1, k_2)$ mit $n(T') < n(T)$ bereits bewiesen.

Zunächst ist durch geeignete Numerierung $t(1, 1) > 0$ erreichbar.

Mit $0 \leq \alpha < \infty$ werde ferner gesetzt

$$(8) \quad s_i'(k_i) := s_i(k_i) - \alpha \chi_{\{1\}}(k_i), \quad t'(k_1, k_2) := t(k_1, k_2) - \alpha \chi_{\{(1,1)\}}(k_1, k_2).$$

Dann erfüllen $s_i'(k_i)$ und $t'(k_1, k_2)$ die Bedingung (T) jedenfalls für alle Paare (K_1, K_2) mit $K_1 \ni 1$ oder $K_2 \ni 1$.

Denn ist etwa $1 \in K_1$, so ist entweder $(1, 1) \in (K_1, K_2)$ oder $1 \in K_2$,

d.h. (T)I ist erfüllt (auf beiden Seiten Subtraktion von α);

ferner gilt für $1 \in K_1$ genau dann $(1, 1) \in (K_1, K_2)$, wenn $1 \in K_2$, d.h.

(T)II ist erfüllt (auf beiden Seiten Subtraktion von 0 oder α).

Allgemein genügen also $s'_i(k_i)$ und $t'(k_1, k_2)$ der Bedingung (T) für

$$\alpha \leq \begin{cases} \gamma_1 := \min_{K_1 \neq 1} \left(\sum_{(K_1, K_2)} t(k_1, k_2) + \sum_{K_2} s_2(k_2) - \sum_{K_1} s_1(k_1) \right) \\ \gamma_2 := \min_{K_2 \neq 1} \left(\sum_{(K_1, K_2)} t(k_1, k_2) + \sum_{K_1} s_1(k_1) - \sum_{K_2} s_2(k_2) \right); \end{cases}$$

denn die rechten Seiten in (T) werden durch den Übergang zu

$s'_i(k_i)$ und $t'(k_1, k_2)$ für $1 \neq K_i$ ($i = 1, 2$) genau um α verkleinert.

Dabei ist $\gamma_1 = \gamma_2 =: \gamma$, da wegen $\sum_{K_1} s_1(k_1) = \sum_{K_2} s_2(k_2) < \infty$ stets

$$\sum_{K_2} s_2(k_2) - \sum_{K_1} s_1(k_1) = \sum_{K_1} s_1(k_1) - \sum_{K_2} s_2(k_2).$$

3. Wird nun $\alpha := \min\{\gamma, t(1, 1)\}$ fest gewählt, so gilt auch

$$0 \leq s'_i(k_i), t'(k_1, k_2) < \infty \text{ für } k_i = 1, \dots, l_i,$$

wobei etwa $s'_1(1) \geq 0$ für $K_1 = \{1\}$, $K_2 = 0$ aus (T)II folgt.

Für $\gamma \geq t(1, 1)$ ist dabei $t'(1, 1) = 0$; andernfalls sei

$$\gamma = \sum_{(K_1^0, K_2^0)} t(k_1, k_2) + \sum_{K_2^0} s_2(k_2) - \sum_{K_1^0} s_1(k_1) \quad \text{mit } K_i^0 \neq 1.$$

Dann gilt für $s'_i(k_i)$ und $t'(k_1, k_2)$ Gleichheit in (T)I für das

Paar (K_1^0, K_2^0) mit $\sum_{K_1^0} s_1(k_1) < \infty$; nach [4.1] läßt sich also $t'(k_1, k_2)$

auf $(\overline{K_1^0}, \overline{K_2^0}) \ni (1, 1)$ durch 0 ersetzen.

Insgesamt hat sich demnach ergeben:

Zu $s_i(k_i)$ und $t(k_1, k_2)$ existieren α und $t'(k_1, k_2)$ mit $0 \leq \alpha < \infty$ und

$0 \leq t'(k_1, k_2) \leq t(k_1, k_2)$ derart, daß $t'(k_1, k_2)$ zusammen mit den ge-

mäß (8) definierten Funktionen $s'_i(k_i)$ der Bedingung (T) genügt

und außerdem $0 \leq s'_i(k_i) < \infty$, $0 = t'(1, 1) \leq t(1, 1) - \alpha$.

4. Wegen $n(T') < n(T)$ existiert dann nach Induktionsan-

nahme eine Funktion $s'(k_1, k_2)$ mit

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq s'(k_1, k_2) \leq t'(k_1, k_2) \quad \text{und} \\ \sum_{K_1} s'(k_1, k_2) = s'_1(k_1), \sum_{K_2} s'(k_1, k_2) = s'_2(k_2) \end{aligned} \right\} \text{ für } k_i = 1, \dots, l_i.$$

Wird also $s(k_1, k_2) := s'(k_1, k_2) + \alpha \chi_{\{(1, 1)\}}(k_1, k_2)$ gesetzt, so besitzt

diese Funktion die geforderten Eigenschaften. ┘

Daß die vorhandene Funktion $s(k_1, k_2)$ nicht notwendig eindeutig

ist, zeigt bereits ein einfaches Beispiel:

Sei $s_i(k_i) = 1 = t(k_1, k_2)$ für $k_i = 1, 2$; dann definiert für $0 \leq j \leq 1$

$s(1, 1) = j = s(2, 2)$ und $s(1, 2) = 1 - j = s(2, 1)$ eine Lösung.

Im Beweis von [4.2] spiegelt sich diese Mehrdeutigkeit in der willkürlichen Reihenfolge, in der die Funktionswerte $s(k_1, k_2)$ maximal gewählt werden.

Der letzte Satz gestattet folgende wesentliche Verschärfung:

Satz 4.3. Sind in [4.2] die Funktionswerte von $s_i(k_i)$ und $t(k_1, k_2)$ ganze Zahlen, so ist dies auch für die Werte der Funktion $s(k_1, k_2)$ erreichbar.

Beweis. Werden im Beweis von [4.2] auch für α nur ganzzahlige Werte zugelassen, so ist es möglich, sämtliche Überlegungen im Bereich der ganzen Zahlen durchzuführen. ┘

Von Interesse ist hier vor allem der Fall, daß $t(k_1, k_2)$ nur die Werte 0 und 1 annimmt.

Denn ist $M_i := \{1, \dots, l_i\}$, $K_i := \{X_i: X_i < M_i\}$, $\mu_i(X_i) := \sum_{X_i} 1$ und (M, K, μ)

der Produktraum der atomaren Maßräume (M_i, K_i, μ_i) , so ergibt [4.3] für $t(k_1, k_2) = \chi_A$ mit $A \subset M$ bei Anwendung von [3.2]:

Genau dann existiert eine Teilmenge B von A mit den Schnittmaß-Funktionen (s_1, s_2) , wenn $s_i(k_i)$ stets ganzzahlig ist und

$$\sum_{K_1} s_1(k_1) \leq \sum_{K_2} \min \left\{ s_2(k_2), \sum_{K_1} t(k_1, k_2) \right\} \quad \text{für } K_1 \subset \{1, \dots, l_1\},$$

$$\sum_{K_2} s_2(k_2) \leq \sum_{K_1} \min \left\{ s_1(k_1), \sum_{K_2} t(k_1, k_2) \right\} \quad \text{für } K_2 \subset \{1, \dots, l_2\}.$$

In gewissem Sinne ist die Bedingung (A) in diesem Fall also notwendig und hinreichend.

Ist insbesondere $A = M$, handelt es sich also um die Frage nach den überhaupt auftretenden Schnittmaß-Funktionen, so ist die Entscheidung über die Existenz von B besonders leicht zu treffen.

Denn zunächst ist durch geeignete Numerierung erreichbar, daß

$$s_i(1) \geq s_i(2) \geq \dots \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Da wegen $t|M = 1$ die rechten Seiten der oben angegebenen Ungleichungen lediglich Funktionen der Mächtigkeit von K_i sind, genügt es hier, wenn die Bedingung für $K_i = \{1, \dots, k\}$ mit $k = 1, \dots, l_i$ erfüllt ist, da dann die linken Seiten bei festem k maximal sind. Das führt zu den $(l_1 + l_2)$ Ungleichungen

$$\sum_{k_1 \leq k} s_1(k_1) \leq \sum_{k_2} \min\{s_2(k_2), k\} \quad \text{für } k = 1, \dots, l_1,$$

$$\sum_{k_2 \leq k} s_2(k_2) \leq \sum_{k_1} \min\{s_1(k_1), k\} \quad \text{für } k = 1, \dots, l_2.$$

Zum Abschluß wird nun noch eine Verallgemeinerung von [4.2] bewiesen, die für die folgenden Überlegungen erforderlich ist:

Satz 4.4. Die Behauptung von [4.2] bleibt bestehen, falls für $s_i(k_i)$ und $t(k_1, k_2)$ auch der Funktionswert ∞ zugelassen wird.

Beweis. 1. Sei etwa $s_i(k_i) < \infty$ für $k_i \leq j_i$,

$$s_i(k_i) = \infty \quad \text{für } k_i > j_i \quad (0 \leq j_i \leq l_i).$$

$K_1 = \{k_1\}$, $K_2 = \{j_2 + 1, \dots, l_2\}$ in (T)I bzw.

$K_2 = \{k_2\}$, $K_1 = \{j_1 + 1, \dots, l_1\}$ in (T)II ergibt

$$(9) \begin{cases} \sum_{k_2 > j_2} t(k_1, k_2) = \infty, & \text{falls } k_1 > j_1 \text{ und } l_2 > j_2 \\ \sum_{k_1 > j_1} t(k_1, k_2) = \infty, & \text{falls } k_2 > j_2 \text{ und } l_1 > j_1; \end{cases}$$

wegen $\sum_{k_1} s_1(k_1) = \sum_{k_2} s_2(k_2)$ ist dabei $l_1 > j_1$ gleichwertig mit $l_2 > j_2$.

Daneben läßt sich voraussetzen

$$(10) \quad t(k_1, k_2) < \infty \quad \text{für } k_1 \leq j_1 \text{ oder } k_2 \leq j_2.$$

Denn mit $\gamma := \max_{i, k_i \leq j_i} \sum s_i(k_i) \in [0, \infty)$ läßt sich $t(k_1, k_2)$ an diesen

Stellen durch $\min\{t(k_1, k_2), \gamma\}$ ersetzen, ohne (T) zu verletzen:

für $K_i \subset \{1, \dots, j_i\}$ ist die linke Seite der i -ten Ungleichung in (T) nie größer als γ , und für $j_i < k_i \in K_i$ ist die rechte Seite der i -ten Ungleichung in (T) stets unendlich, da

$$\sum_{k_2} t(k_1, k_2) + \sum_{k_2} s_2(k_2) = \infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k_1} t(k_1, k_2) + \sum_{k_1} s_1(k_1) = \infty$$

(für $K_2 \subset \{1, \dots, j_2\}$ bzw. $K_1 \subset \{1, \dots, j_1\}$ wegen (9)).

Schließlich bedeutet auch $j_i < l_i$ keine Einschränkung, da andern-

falls wegen $\sum_{k_1} s_1(k_1) = \sum_{k_2} s_2(k_2) < \infty$ und wegen (10) die Voraussetzungen von [4.2] erfüllt sind.

2. Sei nun zunächst $j_i = l_i - 1$.

Dann läßt sich $j_i > 0$ annehmen, da etwa für $l_i = 1$ stets $s_2(k_2) \leq t(1, k_2)$, so daß $s(1, k_2) := s_2(k_2)$ wegen $s_1(1) = \sum_{k_2} s_2(k_2)$ eine Lösung definiert.

Mit $L_i := \{1, \dots, l_i - 1\}$ wird nun außerdem vorausgesetzt:

(11) $t(k_1, l_2) = 0$ für $k_1 \in L_1$, $t(l_1, k_2) = 0$ für $k_2 \in L_2$.

Dann gilt für $K_i \in L_i$

$$\begin{aligned} \sum_{k_1} s_1(k_1) &\leq \sum_{(K_1, K_2 \in L_2)} t(k_1, k_2) + \sum_{L_2 \setminus K_2} s_2(k_2) = \sum_{(K_1, K_2)} t(k_1, k_2) + \sum_{L_2 \setminus K_2} s_2(k_2), \\ \sum_{k_2} s_2(k_2) &\leq \sum_{(K_1 \in L_1, K_2)} t(k_1, k_2) + \sum_{L_1 \setminus K_1} s_1(k_1) = \sum_{(K_1, K_2)} t(k_1, k_2) + \sum_{L_1 \setminus K_1} s_1(k_1). \end{aligned}$$

Nach [4.2] existiert also eine Funktion $s(k_1, k_2)$ auf (L_1, L_2) mit

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq s(k_1, k_2) \leq t(k_1, k_2) \quad \text{und} \\ \sum_{k_1} s(k_1, k_2) = s_1(k_1), \quad \sum_{k_2} s(k_1, k_2) = s_2(k_2) \end{aligned} \right\} \text{für } k_i \in L_i.$$

Wird zusätzlich definiert $s(k_1, k_2) := t(k_1, k_2)$ für $(k_1, k_2) \notin (L_1, L_2)$, so ergibt sich nun eine Lösung des Gesamtproblems, da wegen (11) $s(k_1, l_2) = 0 = s(l_1, k_2)$ für $k_i \in L_i$ und wegen (9) $s(l_1, l_2) = \infty$.

3. Es genügt demnach, bei Verzicht auf (11) zu zeigen:

Zu $k_i \in L_i$ existieren nicht-negative Zahlen $\alpha_1(k_1) \leq t(k_1, l_2)$, $\alpha_2(k_2) \leq t(l_1, k_2)$ derart, daß (T) auch erfüllt wird durch

$$(12) \left\{ \begin{aligned} s'_i(k_i) &:= s_i(k_i) - \alpha_i(k_i) \text{ für } k_i \in L_i, \quad s'_i(l_i) := s_i(l_i) \\ t'(k_1, l_2) &:= 0 =: t'(l_1, k_2) \text{ für } k_i \in L_i, \quad t'(k_1, k_2) := t(k_1, k_2) \text{ sonst} \end{aligned} \right.$$

Denn eine Lösung $s'(k_1, k_2)$ zu $s'_i(k_i)$ und $t'(k_1, k_2)$ liefert in

$$\begin{aligned} s(k_1, l_2) &:= \alpha_1(k_1) \text{ für } k_1 \in L_1, \quad s(l_1, k_2) := \alpha_2(k_2) \text{ für } k_2 \in L_2 \text{ und} \\ s(k_1, k_2) &:= s'(k_1, k_2) \text{ sonst} \end{aligned}$$

wegen $s_i(l_i) = \infty$ eine Lösung des Ausgangsproblems.

4. Wird $s_1(1)$ durch $s_1(1) - \alpha$ und $t(1, l_2)$ durch $t(1, l_2) - \alpha$ ersetzt, so bleibt (T)I stets richtig und (T)II jedenfalls für $K_1 \geq 1$ oder $K_2 \geq l_2$.

$$\gamma := \min_{K_1 \neq 1, K_2 \neq 1} \left[\sum_{(K_1, K_2)} t(k_1, k_2) + \sum_{K_1} s_1(k_1) - \sum_{K_2} s_2(k_2) \right]$$

$$= \sum_{(K_1^0, K_2^0)} t(k_1, k_2) + \sum_{K_1^0} s_1(k_1) - \sum_{K_2^0} s_2(k_2) \quad \text{mit } 1 \notin K_1^0, 1 \notin K_2^0$$

ist dann endlich, da wegen (10) [...] $< \infty$ etwa für $K_1 = \{1\}$, $K_2 = \overline{\{1\}}$.

Wie im Beweis von [4.2] läßt sich also wählen

$$\alpha = \alpha_1(1) := \min\{\gamma, t(1, 1_2)\} \in [0, \infty).$$

Falls $t(1, 1_2) - \alpha > 0$, also $\alpha = \gamma$, gilt dabei Gleichheit in (T)II für (K_1^0, K_2^0) mit $\sum_{K_1^0} s_2(k_2) < \infty$, so daß sich nach [4.1] $t(1, 1_2) - \alpha$

wegen $(1, 1_2) \in (\overline{K_1^0}, \overline{K_2^0})$ durch 0 ersetzen läßt.

Auf diese Weise ergeben sich in $(j_1 + j_2)$ Schritten die für die Definition (12) erforderlichen Größen $\alpha_i(k_i)$.

5. Der allgemeine Fall läßt sich folgendermaßen auf den bereits bewiesenen Fall $j_i = 1_i - 1$ zurückführen:

Der Vektor $\overrightarrow{s'_i(k_i)}$ entstehe aus $\overrightarrow{s_i(k_i)}$ durch additive Zusammenfassung der letzten $(1_i - j_i)$ Komponenten und die Matrix $(t'(k_1, k_2))$ aus $(t(k_1, k_2))$ durch entsprechende Zusammenfassung der letzten Zeilen und Spalten.

Dann erfüllen auch $s'_i(k_i)$ und $t'(k_1, k_2)$ die Voraussetzungen des Satzes und besitzen deshalb eine Lösung $s'(k_1, k_2)$, wobei

$$s'(k_1, j_2 + 1) \leq \sum_{k_2 > j_2} t(k_1, k_2) \quad \text{für } k_1 \leq j_1,$$

$$s'(j_1 + 1, k_2) \leq \sum_{k_1 > j_1} t(k_1, k_2) \quad \text{für } k_2 \leq j_2.$$

Zu $k_1 \leq j_1, k_2 > j_2$ und $k_1 > j_1, k_2 \leq j_2$ existieren also Werte $s(k_1, k_2)$ mit

$$0 \leq s(k_1, k_2) \leq t(k_1, k_2) \quad \text{und}$$

$$\sum_{k_2 > j_2} s(k_1, k_2) = s'(k_1, j_2 + 1), \quad \sum_{k_1 > j_1} s(k_1, k_2) = s'(j_1 + 1, k_2).$$

Wird zusätzlich definiert $s(k_1, k_2) := s'(k_1, k_2)$ für $k_i \leq j_i$,

$$s(k_1, k_2) := t(k_1, k_2) \quad \text{für } k_i > j_i,$$

so ergibt sich damit eine Lösung zu $s_i(k_i)$ und $t(k_1, k_2)$, da

insbesondere wegen (9) $\sum_{k_2} s(k_1, k_2) = \infty = \sum_{k_1} s(k_1, k_2)$ für $k_i > j_i$. ┘

§5. Der erste Hauptsatz

Im Gegensatz zu §4 wird nun nicht mehr vorausgesetzt, daß die Grundmengen der beiden Maßräume $(M_i, \mathcal{K}_i, \mu_i)$ endlich sind. Zunächst wird ein [3.1] entsprechender Satz bewiesen, der jedoch auf die Forderung nach Atomlosigkeit verzichtet:

Satz 5.1. $(M, \mathcal{K}, \mu)$ sei der Produktraum zweier normaler Maßräume $(M_i, \mathcal{K}_i, \mu_i)$.

Ist dann $g|M$ eine $\mathcal{K}$ -meßbare Funktion mit $g \geq 0$ und $f_1 \in \mathcal{H}(\mu_1)$

mit $0 \leq f_1(x_1) \leq \int_{M_2} g(x_1, x_2) d\mu_2$ für $x_1 \in M_1$,

so existiert eine $\mathcal{K}$ -meßbare Funktion $f|M$ mit $0 \leq f \leq g$ und

$$\int_{M_2} f(x_1, x_2) d\mu_2 = f_1(x_1) \quad \text{für alle } x_1.$$

Beweis. 1. Ist $M_2 = \sum_n M_2^n$ eine normale Zerlegung zu $\mu_2 | \mathcal{K}_2$, so ist

$$g_2(x_2) := \sum_n (2^n (\mu_2(M_2^n) + 1))^{-1} \chi_{M_2^n}(x_2)$$

eine stets positive $\mathcal{K}_2$ -meßbare Funktion mit $\int_{M_2} g_2 d\mu_2 < \infty$.

Sei nun $g_\alpha(x_1, x_2) := \min \{g(x_1, x_2), \alpha g_2(x_2)\}$ für $0 \leq \alpha < \infty$;

dann gilt für $\sigma > 0$

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = g_0(x_1, x_2) \leq g_\alpha(x_1, x_2) \leq g_{\alpha+\sigma}(x_1, x_2) \leq \lim_{\alpha \rightarrow \infty} g_\alpha(x_1, x_2) = g(x_1, x_2) \\ \int_{M_2} g_\alpha(x_1, x_2) d\mu_2 \leq \int_{M_2} g_{\alpha+\sigma}(x_1, x_2) d\mu_2 \leq \int_{M_2} g_\alpha(x_1, x_2) d\mu_2 + \sigma \int_{M_2} g_2 d\mu_2. \end{array} \right.$$

Daher gilt für die Funktion $h_\alpha(x_1) := \int_{M_2} g_\alpha(x_1, x_2) d\mu_2$:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_\alpha(x_1) \text{ ist stetig in } \alpha \text{ und } \mathcal{K}_1\text{-meßbar in } x_1, \\ h_\alpha(x_1) = 0 \leq f_1(x_1) \leq \int_{M_2} g(x_1, x_2) d\mu_2 = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} h_\alpha(x_1) \quad \text{für } x_1 \in M_1, \end{array} \right.$$

wobei die letzte Gleichung wegen (13) aus dem Satz über die Integration bei monotoner Konvergenz folgt.

$$2. f(x_1, x_2) := \sup_{\alpha \text{ rational}} \chi_{\{h_\alpha \leq f_1\}}(x_1) \cdot g_\alpha(x_1, x_2)$$

besitzt nun die geforderten Eigenschaften.

Denn wegen $\{h_\alpha \leq f_1\} \in \mathcal{K}_1$ ist $f|M$ jedenfalls $\mathcal{K}$ -meßbar mit $0 \leq f \leq g$.

Ferner sind die Funktionen $g_\alpha | M$ bzgl. " $\leq$ " linear geordnet, so daß

$$\int_{M_2} f(x_1, x_2) d\mu_2 = \sup_{M_2} \int g_\alpha(x_1, x_2) d\mu_2,$$

wobei das Supremum über alle rationalen α mit $h_\alpha(x_1) \leq f_1(x_1)$ zu bilden ist, d.h.

$$\int_{M_2} f(x_1, x_2) d\mu_2 = \sup \{ h_\alpha(x_1) : \alpha \text{ rational, } h_\alpha(x_1) \leq f_1(x_1) \}.$$

Da die rationalen Zahlen dicht liegen, folgt daraus wegen (14) die Behauptung. ┘

Im folgenden wird nun zunächst jenes Problem behandelt, das durch Übergang zu den Maßen

$$\begin{aligned} \nu_i(X_i) &:= \int_{X_i} f_i d\mu_i \quad \text{für } X_i \in \mathcal{K}_i \\ g(A) &:= \int_A g d\mu \quad \text{für } A \in \mathcal{K} \text{ entsteht.} \end{aligned}$$

Gegeben sind also Maße $g | \mathcal{K}$ und $\nu_i | \mathcal{K}_i$; ist dann die Bedingung

$$(R) \left\{ \begin{array}{l} \text{I} \quad \nu_1(X_1) \leq g((X_1, X_2)) + \nu_2(\overline{X}_2) \\ \text{II} \quad \nu_2(X_2) \leq g((X_1, X_2)) + \nu_1(\overline{X}_1) \end{array} \right\} \text{ für } X_i \in \mathcal{K}_i$$

hinreichend für die Existenz eines Maßes $\nu | \mathcal{K}$ mit

$$\begin{aligned} \nu(A) &\leq g(A) \quad \text{für } A \in \mathcal{K} \quad \text{und} \\ \nu((X_1, M_2)) &= \nu_1(X_1), \quad \nu((M_1, X_2)) = \nu_2(X_2) \quad \text{für } X_i \in \mathcal{K}_i? \end{aligned}$$

Die Notwendigkeit ergibt sich dabei in der üblichen Weise.

Es handelt sich also um ein Problem ähnlich jenem, das zur Definition des Produktmaßes führt:

Einerseits werden statt der Werte von $\nu | \mathcal{K}$ für alle Rechtecke nur die durch $\nu | \mathcal{K}$ auf $\mathcal{K}_i$ definierten Marginal-Maße vorgegeben; andererseits wird aber gefordert, daß die Werte von $\nu | \mathcal{K}$ stets unterhalb jener eines festen Maßes liegen.

Unter einigen Einschränkungen ermöglichen die Ergebnisse aus §4 hierzu bereits eine wesentliche Aussage:

Satz 5.2. Sei ν_i ein Inhalt auf dem abzählbaren Mengenkörper $\mathcal{M}_i$ über der Grundmenge M_i ($i = 1, 2$) und g ein Inhalt auf dem Mengenkörper $\mathcal{M} := \{ (X_1, X_2) : X_i \in \mathcal{M}_i \}$ mit der normalen Zerlegung

$(M_1, M_2) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} (M_1^k, M_2^l)$, wobei zusätzlich

$$\varphi((M_1^k, M_2^l)) < \infty \text{ für } k \in \mathbb{Z}, \quad \varphi((M_1^k, M_2^l)) < \infty \text{ für } l \in \mathbb{Z}.$$

Gilt dann für $X_i \in \mathcal{M}_i$

$$\nu_1(X_1) \leq \varphi((X_1, X_2)) + \nu_2(\overline{X}_2), \quad \nu_2(X_2) \leq \varphi((X_1, X_2)) + \nu_1(\overline{X}_1),$$

so existiert ein Inhalt $\nu|_{\mathcal{M}}$ mit der normalen Zerlegung

$(M_1, M_2) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} (M_1^k, M_2^l)$ und folgenden Eigenschaften:

$$\nu(A) \leq \varphi(A) \text{ für } A \in \mathcal{M} \text{ und}$$

$$\nu((X_1, M_2)) = \nu_1(X_1) \text{ für } X_1 \in M_1^k \mathcal{M}_1, \quad \nu((M_1, X_2)) = \nu_2(X_2) \text{ für } X_2 \in M_2^l \mathcal{M}_2.$$

Beweis. 1. Ist $M_i^n \mathcal{M}_i = \{X_{i,1}^n, X_{i,2}^n, \dots\}$ mit $X_{i,0}^n = M_i^n$, so sei

$$\mathcal{Q}_i^n := \{X_{i,m}^n : 1, m \leq n\} \text{ für } n \in \mathbb{Z} \text{ und } i = 1, 2, \text{ so daß}$$

$$(15) \quad \mathcal{Q}_i^1 \subset \mathcal{Q}_i^2 \subset \dots, \quad \sum_{i=1}^2 M_i^n \mathcal{M}_i \subset \sum_{i=1}^2 \mathcal{Q}_i^n \subset \mathcal{M}_i.$$

Dabei existieren Zerlegungen $M_i = \sum_{1 \leq m \leq r_n} Y_{i,m}^n$ mit $r_n := n2^n + 1$ derart,

daß $\mathcal{Q}_i^n = \{Y_{i,m}^n : 1 \leq m \leq r_n\}$, wobei sich annehmen läßt

$$Y_{i,2m-1}^n + Y_{i,2m}^n = Y_{i,m}^{n-1} \text{ für } 1 \leq m < r_{n-1} \text{ und}$$

$$\sum_{2^{r_{n-1}-1} \leq m < r_n} Y_{i,m}^n = M_i^n, \quad Y_{i,r_n}^n = \sum_{m > n} M_i^m.$$

Für festes $n \in \mathbb{Z}$ wird nun definiert

$$s_i^n(k_i) := \nu_i(Y_{i,k_i}^n), \quad t^n(k_1, k_2) := \varphi((Y_{1,k_1}^n, Y_{2,k_2}^n)) \text{ für } k_i = 1, \dots, r_n;$$

$s_i^n(k_i)$ und $t^n(k_1, k_2)$ erfüllen dann nach Voraussetzung die Bedingungen von [4.4].

Daher existieren zu $\mathcal{Q}_1^n \times \mathcal{Q}_2^n$ Matrizen $\Sigma^n = (s^n(k_1, k_2))$ mit

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq s^n(k_1, k_2) \leq \varphi((Y_{1,k_1}^n, Y_{2,k_2}^n)) \quad \text{und} \\ \sum_{k_1} s^n(k_1, k_2) = \nu_1(Y_{1,k_1}^n), \quad \sum_{k_2} s^n(k_1, k_2) = \nu_2(Y_{2,k_2}^n) \end{array} \right\} \text{ für } k_i = 1, \dots, r_n.$$

2. Es bezeichne nun allgemein $\widehat{\Sigma}$ jene Matrix, die aus Σ durch Streichen der letzten Zeile und Spalte entsteht.

Dann ist $S^n := \{\widehat{\Sigma}^n : \Sigma^n \text{ Lösung von (16)}\}$

eine nicht-leere und kompakte Teilmenge des $R_{(r_n-1)^2}$

Denn ist $\Sigma^n = (s^n(k_1, k_2))$ eine Lösung von (16), so gilt stets

$$\sum_{k_i < r_n} |s^n(k_1, k_2)| \leq \sum_{k_i < r_n} \varphi((Y_{1,k_1}^n, Y_{2,k_2}^n)) = \sum_{k_i, l \leq n} \varphi((M_1^k, M_2^l)) < \infty.$$

Konvergiert ferner eine Folge $\widehat{\Sigma}_m^n \in S^n$ für $m \rightarrow \infty$ elementweise, so auch die Folge Σ_m^n , da wegen (16) $\nu_i(Y_{i, A_i}^n) < \infty$ für $k_i < r_n$ und daher die Elemente der letzten Zeile und Spalte lineare Funktionen der übrigen Elemente sind.

$\Sigma^n := \lim_{m \rightarrow \infty} \Sigma_m^n$ ist dann ebenfalls Lösung von (16), so daß

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \widehat{\Sigma}_m^n = \widehat{\Sigma}^n \in S^n.$$

Für $m \leq n$ bezeichne im folgenden A_n^m jene Abbildung des R_{r_n} in den R_{r_m} , die einer Matrix Σ^n zu $q_1^n \times q_2^n$ die zu $q_1^m \times q_2^m$ gehörige zuordnet; $A_n^m \Sigma^n$ entsteht also aus Σ^n durch additive Zusammenfassung gewisser Zeilen und Spalten.

Da mit Σ^n auch $A_n^m \Sigma^n$ Lösung von (16) (mit m statt n) ist, gilt

$$S_n^m := \{ \widehat{A_n^m \Sigma^n} : \widehat{\Sigma}^n \in S^n \} \subset S^m.$$

Wegen der Kompaktheit von S^n und der Stetigkeit von A_n^m ist S_n^m dabei eine nicht-leere und abgeschlossene Teilmenge.

Aus $A_n^m \Sigma^n = A_{n-1}^m A_{n-1}^{n-1} \Sigma^n$ für $m < n$ folgt ferner $S_{m+1}^m \supset S_{m+2}^m \supset \dots$

3. Es gilt nun folgender Hilfssatz:

Zu ν_i / M_i und g / M existiert eine Folge r_n -reihiger Matrizen Σ_n^0 mit den Eigenschaften

$$A_{n+1}^{n+1} \Sigma_n^0 = \Sigma_0^{n+1} \quad \text{und} \quad \widehat{\Sigma}_0^n \in \prod_{m \in \mathbb{Z}} S_{n+m}^n \subset S^n \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

Zum Beweis werden die Matrizen Σ_n^0 rekursiv konstruiert:

Für $n = 1$ ist lediglich $\prod_{\mathbb{Z}} S_{1+m}^1 \neq \emptyset$ zu zeigen; das folgt jedoch aus dem Satz von Cantor, da es sich - wie oben gezeigt - um den Durchschnitt einer absteigenden Folge nicht-leerer abgeschlossener Teilmengen einer kompakten Menge handelt.

Es seien nun $\Sigma_0^1, \dots, \Sigma_0^n$ bereits konstruiert.

Die Mengen $S_{n+m}^{n+1} := \{ \widehat{\Sigma}^{n+1} \in S_{n+m}^{n+1} : A_{n+1}^{n+1} \Sigma^{n+1} = \Sigma_0^n \}$, $m \in \mathbb{Z}$

erfüllen dann ebenfalls die Voraussetzung des Satzes von Cantor;

denn S_{n+m}^{n+1} ist wegen $\widehat{\Sigma}_0^n \in \prod_{m \in \mathbb{Z}} S_{n+m}^n$ nicht-leer und wegen der Abgeschlossenheit von $\{ \widehat{\Sigma}^{n+1} : A_{n+1}^{n+1} \Sigma^{n+1} = \Sigma_0^n \}$ abgeschlossen.

Die Konstruktion läßt sich also fortsetzen durch eine Matrix Σ_0^{n+1} mit $A_{n+1}^n \Sigma_0^{n+1} = \Sigma_0^n$ und $\widehat{\Sigma_0^{n+1}} \in \prod_{m \in \mathbb{Z}} S_{n+m}^{n+1} \subset \prod_{m \in \mathbb{Z}} S_{n+1+m}^{n+1}$.

4. Nun bezeichne σ_n den durch $\widehat{\Sigma_0^n}$ definierten Inhalt auf

$$\mathcal{Q}^n := \left(\sum_{\mathbf{A} \leq n} M_1^{\mathbf{A}} \right) \mathcal{Q}_1^n \times \left(\sum_{\mathbf{A} \leq n} M_2^{\mathbf{A}} \right) \mathcal{Q}_2^n.$$

Für die Mengenkörper $\mathcal{Q}^n$ gilt dabei wegen (15)

$$(17) \quad \mathcal{Q}^1 \subset \mathcal{Q}^2 \subset \dots, \quad \sum_{\mathbf{A}, \mathbf{A}' \in \mathbb{Z}} (M_1^{\mathbf{A}}, M_2^{\mathbf{A}'}) \mathcal{M} \subset \sum_{\mathbb{Z}} \mathcal{Q}^n \subset \mathcal{M}.$$

Die Inhalte $\sigma_n | \mathcal{Q}_n$ sind wegen $\Sigma_0^m = A_n^m \Sigma_0^n$ für $m < n$ verträglich, so daß sich bei festem k, l eindeutig definieren läßt

$$\nu_{\mathbf{A}, \ell}(A) := \sigma_n(A) \quad \text{für } A \in (M_1^{\mathbf{A}}, M_2^{\mathbf{A}}) \mathcal{Q}^n;$$

wegen (17) ist $\nu_{\mathbf{A}, \ell}$ dann ein endlicher Inhalt auf $(M_1^{\mathbf{A}}, M_2^{\mathbf{A}}) \mathcal{M}$.

Jetzt ist die Definition des gesuchten Inhalts $\nu | \mathcal{M}$ möglich:

$$\nu(A) := \sum_{\mathbf{A}, \ell \in \mathbb{Z}} \nu_{\mathbf{A}, \ell}(A(M_1^{\mathbf{A}}, M_2^{\mathbf{A}})) \quad \text{für } A \in \mathcal{M}.$$

5. $\nu | \mathcal{M}$ ist also ein Inhalt mit der normalen Zerlegung

$$(M_1, M_2) = \sum_{\mathbf{A}, \ell \in \mathbb{Z}} (M_1^{\mathbf{A}}, M_2^{\mathbf{A}}).$$

Wegen $\widehat{\Sigma_0^n} \in S^n$ ist $\Sigma_0^n = (s_0^n(k_1, k_2))$ eine Lösung von (16), so daß

$$s_0^n(k_1, k_2) \leq \wp((Y_{1, \mathbf{A}_1}^n, Y_{2, \mathbf{A}_2}^n)) \quad \text{für } k_i = 1, \dots, r_n, \text{ d.h.}$$

$$\nu_{\mathbf{A}, \ell}(A) \leq \wp(A) \quad \text{für } A \in (M_1^{\mathbf{A}}, M_2^{\mathbf{A}}) \mathcal{M};$$

wegen $\nu(A) = \sum_{\mathbf{A}, \ell \in \mathbb{Z}} \nu_{\mathbf{A}, \ell}(A(M_1^{\mathbf{A}}, M_2^{\mathbf{A}}))$ und $\wp(A) \geq \sum_{\mathbf{A}, \ell \in \mathbb{Z}} \wp(A(M_1^{\mathbf{A}}, M_2^{\mathbf{A}}))$ gilt also

$$\nu(A) \leq \wp(A) \quad \text{für } A \in \mathcal{M}.$$

Ferner gilt für $Y_{1, \mathbf{A}_1}^n \leq M_1^{\mathbf{A}_1}$ mit $k_1 \leq r_n$

$$\sum_{\mathbf{A} \leq n} \nu_{\mathbf{A}, \ell}((Y_{1, \mathbf{A}_1}^n, M_2^{\mathbf{A}})) = \sum_{\mathbf{A}_2 \leq r_n} s_0^n(k_1, k_2) = \nu_1(Y_{1, \mathbf{A}_1}^n) - s_0^n(k_1, r_n) \leq \nu_1(Y_{1, \mathbf{A}_1}^n)$$

$$\begin{aligned} \text{und } \sum_{\mathbf{A} \leq n} \nu_{\mathbf{A}, \ell}((Y_{1, \mathbf{A}_1}^n, M_2^{\mathbf{A}})) &= \nu_1(Y_{1, \mathbf{A}_1}^n) - s_0^n(k_1, r_n) \geq \nu_1(Y_{1, \mathbf{A}_1}^n) - \wp((Y_{1, \mathbf{A}_1}^n, Y_{2, r_n}^n)) \\ &= \nu_1(Y_{1, \mathbf{A}_1}^n) - \sum_{\mathbf{A} > n} \wp((Y_{1, \mathbf{A}_1}^n, M_2^{\mathbf{A}})), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus der Normalität von $\wp | \mathcal{M}$ folgt.

Ist nun $X_1 \in M_1^{\mathbf{A}} \mathcal{M}_1$, so gilt wegen (15) für hinreichend großes n

$X_1 \in M_1^{\mathbf{A}} \mathcal{Q}_1^n$ und daher gemäß der Definition von $\mathcal{Q}_1^n$ auf Grund der Additivität von $\nu_i | \mathcal{M}_i$ und $\wp | \mathcal{M}$

$$\nu_1(X_1) - \sum_{k \geq n} \rho((X_1, M_2^k)) \leq \sum_{k \leq n} \nu((X_1, M_2^k)) \leq \nu_1(X_1).$$

Da $\sum_k \nu((X_1, M_2^k)) = \nu((X_1, M_2))$ und $\sum_k \rho((X_1, M_2^k)) \leq \rho((M_1^A, M_2)) < \infty$,

liefert der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ also die Gleichung

$$\nu((X_1, M_2)) = \nu_1(X_1) \quad \text{für } X_1 \in M_1^A m_1.$$

Da Entsprechendes für $i = 2$ gilt, sind damit für $\nu|_{\mathcal{M}}$ alle behaupteten Eigenschaften nachgewiesen. ┘

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich nun zeigen, daß die Bedingung (R) unter sehr einfachen Voraussetzungen tatsächlich auch hinreichend für die Existenz des Maßes $\nu|_{\bar{\mathcal{K}}}$ ist:

Satz 5.3. $(M_i, \bar{\mathcal{K}}_i, \nu_i)$ sei ein beliebiger Maßraum ($i = 1, 2$) und ρ ein Maß auf dem σ -Körper $\bar{\mathcal{K}} := \bar{\mathcal{K}}_1 \times \bar{\mathcal{K}}_2$ über der Grundmenge $M := (M_1, M_2)$ derart, daß mit $\rho_1(X_1) := \rho((X_1, M_2))$ und $\rho_2(X_2) := \rho((M_1, X_2))$ $(M_i, \bar{\mathcal{K}}_i, \rho_i)$ ein normaler separabler Maßraum ist.

Genügen dann die Maße $\nu_i|_{\bar{\mathcal{K}}_i}$ und $\rho|_{\bar{\mathcal{K}}}$ der Bedingung (R), so existiert ein Maß $\nu|_{\bar{\mathcal{K}}}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\nu(A) \leq \rho(A) \quad \text{für } A \in \bar{\mathcal{K}} \quad \text{und}$$

$$\nu((X_1, M_2)) = \nu_1(X_1), \quad \nu((M_1, X_2)) = \nu_2(X_2) \quad \text{für } X_i \in \bar{\mathcal{K}}_i.$$

Beweis. 1. Nach Voraussetzung existiert eine abzählbare dichte Menge $\{X_i^1, X_i^2, \dots\}$ zu $(M_i, \bar{\mathcal{K}}_i, \rho_i)$ und eine Zerlegung $M_i = \sum_k M_i^n$ in $\bar{\mathcal{K}}_i$ mit $\rho((M_1^A, M_2)) < \infty$ für $k \in \mathbb{Z}$, $\rho((M_1, M_2^A)) < \infty$ für $l \in \mathbb{Z}$.

$$\mathcal{M}_i := {}^K(\{X_i^n : n \in \mathbb{Z}\} \dot{+} \{M_i^n : n \in \mathbb{Z}\})$$

ist dann ein abzählbarer Mengenkörper über der Grundmenge M_i ; denn $\mathcal{M}_i$ besteht aus den endlichen Vereinigungen endlicher Durchschnitte der abzählbar vielen Mengen X_i^n , $\bar{X}_i^n$, M_i^n , $\bar{M}_i^n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Mit $\mathcal{H}_i := {}^B \mathcal{M}_i \subset \bar{\mathcal{K}}_i$ gilt nun:

(18) Zu $X_i \in \bar{\mathcal{K}}_i$ existiert $Y_i \in \mathcal{H}_i$ mit $\rho_i(X_i \dot{+} Y_i) = 0$.

Denn ist $\rho_i(X_i) < \infty$, so gilt $\rho_i(X_i \dot{+} X_i^A) < 2^{-k}$ für eine geeignete Folge $((n_k))$, so daß für $Y_i := \varliminf_{k \rightarrow \infty} X_i^{n_k} \in \mathcal{H}_i$ wegen

$$X_i \dot{+} Y_i \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} (X_i \dot{+} X_i^A) < \sum_{k \geq l} (X_i \dot{+} X_i^A) \quad \text{für } l \in \mathbb{Z}$$

$$g_i(X_i + Y_i) \leq \sum_{k \geq i} g_i(X_i + X_k^{n_k}) < \sum_{k \geq i} 2^{-k} \rightarrow 0;$$

zu beliebigem $X_i \in \mathcal{K}_i$ existiert also $Y_i^n \in \mathcal{J}_i$ mit $g_i(X_i M_i^n + Y_i^n) = 0$,

so daß für $Y_i := \sum_{n \in \mathbb{Z}} Y_i^n \in \mathcal{J}_i$ wegen $M_i = \sum_{n \in \mathbb{Z}} M_i^n$

$$g_i(X_i + Y_i) \leq g_i(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (X_i M_i^n + Y_i^n)) = 0.$$

2. Mit $\mathcal{M} := \mathcal{K} \{ (Y_1, Y_2) : Y_i \in \mathcal{M}_i \}$ und der Zerlegung

$\mathcal{M} = \sum_{k, \ell \in \mathbb{Z}} (\mathcal{M}_1^k, \mathcal{M}_2^\ell)$ erfüllen $\nu_i | \mathcal{M}_i$ und $\rho | \mathcal{M}$ die Voraussetzungen von [5.2]; es existiert also ein Inhalt $\nu | \mathcal{M}$ mit der normalen Zerlegung $\mathcal{M} = \sum_{k, \ell \in \mathbb{Z}} (\mathcal{M}_1^k, \mathcal{M}_2^\ell)$ und den Eigenschaften

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu(A) \leq \rho(A) \quad \text{für } A \in \mathcal{M} \quad \text{und} \\ \nu((Y_1, \mathcal{M}_2)) = \nu_1(Y_1), \quad \nu((\mathcal{M}_1, Y_2)) = \nu_2(Y_2) \quad \text{für } Y_i \in \mathcal{M}_i^{n_i}. \end{array} \right.$$

3. Ist nun $D_n \in (\mathcal{M}_1^k, \mathcal{M}_2^\ell) \mathcal{M}$ eine absteigende Folge mit $\prod_{n \in \mathbb{Z}} D_n = 0$,

so folgt wegen $\rho((\mathcal{M}_1^k, \mathcal{M}_2^\ell)) < \infty$ aus der ersten Gleichung in (19)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(D_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(D_n) = \rho(\prod_{n \in \mathbb{Z}} D_n) = 0,$$

d.h. $\nu | (\mathcal{M}_1^k, \mathcal{M}_2^\ell) \mathcal{M}$ ist σ -additiv.

Sind also $A_n \in \mathcal{M}$ disjunkte Mengen mit $A := \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n \in \mathcal{M}$, so gilt

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \sum_{k, \ell \in \mathbb{Z}} \nu(A(\mathcal{M}_1^k, \mathcal{M}_2^\ell)) = \sum_{k, \ell \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \nu(A_n(\mathcal{M}_1^k, \mathcal{M}_2^\ell)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k, \ell \in \mathbb{Z}} \nu(A_n(\mathcal{M}_1^k, \mathcal{M}_2^\ell)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \nu(A_n), \end{aligned}$$

d.h. $\nu | \mathcal{M}$ ist ein normaler σ -additiver Inhalt und läßt sich daher erweitern zu einem Maß auf $\mathcal{J}$, wobei

$$\mathcal{J} := {}^s \mathcal{M} = {}^s \mathcal{M}_1 \times {}^s \mathcal{M}_2 = \mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2,$$

da ${}^s \mathcal{M}$ alle Rechtecke (Y_1, Y_2) mit $Y_i \in {}^s \mathcal{M}_i$ enthält.

4. Es gilt nun folgender einfache Hilfssatz:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Sind } \mu, \mu' \text{ zwei Maße auf } {}^s \mathcal{J} \text{ mit einer normalen Zerlegung im} \\ \text{Mengenkörper } \mathcal{J}, \text{ so folgt aus } \mu(A) \leq \mu'(A) \text{ für } A \in \mathcal{J} \text{ auch} \\ \mu(A) \leq \mu'(A) \quad \text{für } A \in {}^s \mathcal{J}. \end{array} \right.$$

Wegen der Normalität lassen sich die Maße beim Beweis als endlich annehmen.

$$\bar{\mu}(A) := \mu'(A) - \mu(A) \geq 0$$

definiert dann einen endlichen σ -additiven Inhalt auf $\mathcal{G}$, der sich also erweitern läßt zu einem Maß $\bar{\mu}|^{\sigma}\mathcal{G}$.

Da nun die endlichen Maße $\mu + \bar{\mu}$ und μ' auf $\mathcal{G}$ übereinstimmen, gilt wegen der Eindeutigkeit der Erweiterung auf ${}^{\sigma}\mathcal{G}$

$$\mu(A) \leq \mu(A) + \bar{\mu}(A) = \mu'(A) \quad \text{für } A \in {}^{\sigma}\mathcal{G}.$$

5. Wegen der σ -Additivität von $\nu_i|_{\mathcal{M}_i}$ und $\nu|_{\mathcal{M}}$ gilt die zweite Beziehung in (19) für beliebige Mengen $Y_i \in \mathcal{M}_i$.

Da die Maße $\nu|_{\mathcal{H}}, \mathcal{G}|_{\mathcal{H}}$ und - wegen $\nu_i(Y_i) \leq \mathcal{G}_i(Y_i)$ für $Y_i \in \mathcal{M}_i$ - auch $\nu_i|_{\mathcal{H}_i}$ normale Zerlegungen in $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{M}_i$ besitzen, liefert Anwendung von (20) also als Verschärfung von (19)

$$(21) \quad \begin{cases} \nu(A) \leq \mathcal{G}(A) & \text{für } A \in \mathcal{H} \quad \text{und} \\ \nu((Y_1, M_2)) = \nu_1(Y_1), \nu((M_1, Y_2)) = \nu_2(Y_2) & \text{für } Y_i \in \mathcal{H}_i. \end{cases}$$

6. Wegen der Normalität von $\mathcal{G}|_{\mathcal{H}}$ existiert also nach dem Satz von Radon-Nikodym eine $\mathcal{H}$ -meßbare Funktion $h|M$ mit $0 \leq h \leq 1$ und

$$\nu(A) = \int_A h \, d\mathcal{G} \quad \text{für } A \in \mathcal{H}.$$

Mittels dieser Gleichung läßt sich $\nu|_{\mathcal{H}}$ erweitern zu einem Maß auf $\bar{\mathcal{K}}$, ohne die Ungleichung in (21) zu verletzen.

Zu beliebigem $X_1 \in \bar{\mathcal{K}}_1$ existiert nun wegen (18) eine Menge $Y_1 \in \mathcal{H}_1$ mit

$$\mathcal{G}((X_1 + Y_1, M_2)) = \mathcal{G}_1(X_1 + Y_1) = 0, \text{ so daß wegen (21)}$$

$$\nu((X_1 + Y_1, M_2)) \leq \mathcal{G}((X_1 + Y_1, M_2)) = 0 \text{ und nach (R)I}$$

$$\nu_1(X_1 + Y_1) \leq \mathcal{G}((X_1 + Y_1, M_2)) + \nu_2(\bar{M}_2) = 0.$$

Daraus folgt für $X_1 \in \bar{\mathcal{K}}_1$ wegen (21)

$$\nu((X_1, M_2)) = \nu((Y_1, M_2)) = \nu_1(Y_1) = \nu_1(X_1).$$

Da Entsprechendes für $i = 2$ gilt, besitzt $\nu|_{\bar{\mathcal{K}}}$ also alle geforderten Eigenschaften. ┘

Vor Anwendung dieses Satzes auf den Fall von Funktionen $f_i|M_i$ und $g|M$, die der Bedingung (G) genügen, ist folgende Vereinbarung erforderlich:

Um zu erreichen, daß die Gesamtheit aller Paare

$(\int_{M_2} f(x_1, x_2) d\mu_2, \int_{M_1} f(x_1, x_2) d\mu_1)$ mit $0 \leq f \leq g$ wirklich eine Teilmenge von $(\mathcal{M}(\mu_1), \mathcal{M}(\mu_2))$ darstellt, sei $g|M$ ein Element von

$$\mathcal{G}(\mu_1, \mu_2) := \left\{ g|M: \begin{array}{l} g \geq 0, \quad g \text{ } \bar{\kappa}\text{-meßbar,} \\ \int_{M_2} g(x_1, x_2) d\mu_2 < \infty \quad \mu_1\text{-fast, } \int_{M_1} g(x_1, x_2) d\mu_1 < \infty \quad \mu_2\text{-fast} \end{array} \right\}$$

Jetzt läßt sich der erste Hauptsatz beweisen:

Satz 5.4. $(M, \bar{\kappa}, \mu)$ sei der Produktraum zweier normaler Maßräume $(M_1, \bar{\kappa}_1, \mu_1)$; ferner sei $g|M$ eine feste Funktion aus $\mathcal{G}(\mu_1, \mu_2)$.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer $\bar{\kappa}$ -meßbaren Funktion $f|M$ derart, daß

$$0 \leq f \leq g \quad \text{und}$$

$$\int_{M_2} f(x_1, x_2) d\mu_2 \stackrel{\mu_1}{=} f_1(x_1), \quad \int_{M_1} f(x_1, x_2) d\mu_1 \stackrel{\mu_2}{=} f_2(x_2),$$

bilden dann neben $(f_1, f_2) \in (\mathcal{M}(\mu_1), \mathcal{M}(\mu_2))$ die Ungleichungen

$$\int_{X_1} f_1 d\mu_1 \leq \varphi_1(X_1; g, f_2), \quad \int_{X_2} f_2 d\mu_2 \leq \varphi_2(X_2; g, f_1) \quad \text{für } X_i \in \bar{\kappa}_i.$$

Beweis. 1. Existiert eine Funktion $f|M$ mit den angegebenen Eigenschaften, so ergibt $g \in \mathcal{G}(\mu_1, \mu_2)$ sofort $(f_1, f_2) \in (\mathcal{M}(\mu_1), \mathcal{M}(\mu_2))$.

Die behaupteten Ungleichungen gelten nach [3.2], da etwa für $i = 1$

$$\begin{aligned} \int_{X_1} f_1 d\mu_1 &= \int_{(X_1, M_2)} f d\mu \leq \int_{(X_1, X_2)} f d\mu + \int_{(M_1, \bar{X}_2)} f d\mu \\ &\leq \int_{(X_1, X_2)} g d\mu + \int_{\bar{X}_2} f_2 d\mu_2 \quad \text{für } X_1 \in \bar{\kappa}_1. \end{aligned}$$

2. Seien umgekehrt die angegebenen Bedingungen erfüllt.

Zunächst wird dann folgende bekannte Tatsache benötigt:

$$(22) \left\{ \begin{array}{l} \text{Ist } \mu|^{\mathfrak{Q}} \text{ ein Maß mit einer normalen Zerlegung im Mengen-} \\ \text{körper } \mathfrak{Q}, \text{ so existieren zu } A \in \mathfrak{Q} \text{ und zu } \varepsilon > 0 \text{ Mengen } A_n \in \mathfrak{Q} \text{ mit} \\ \sum_n A_n \supset A \text{ und } \mu(\sum_n A_n - A) < \varepsilon. \end{array} \right.$$

Ist $\mathfrak{Q}$ der Mengenkörper der endlichen Rechteckssummen zu $\bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2$, also $\mathfrak{Q} = \bar{\kappa}_1 \times \bar{\kappa}_2$, so existieren daher wegen der Normalität von $\mu|^{\mathfrak{Q}}$ zu jedem $n \in \mathbb{Z}$ und zu jeder rationalen Zahl $r > 0$ Mengen $X_{1r}^{mn} \in \bar{\kappa}_1$ mit

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} (X_{1r}^{mn}, X_{2r}^{mn}) \supset \{g \leq r\} \quad \text{und} \quad \mu(\sum_{m \in \mathbb{Z}} (X_{1r}^{mn}, X_{2r}^{mn}) - \{g \leq r\}) < \frac{1}{n};$$

für $A_r := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (X_{1r}^{mn}, X_{2r}^{mn})$ gilt also

$$A_r = \{g \leq r\} + N_r \text{ mit } N_r \in \mathcal{K} \text{ und } \mu(N_r) = 0.$$

Zu der Nullmenge $N := \sum_{r \text{ rational}} N_r \in \mathcal{K}$ existieren gleichfalls wegen (22)

Mengen $X_{i0}^{mn} \in \mathcal{K}_i$ derart, daß

$$A_0 := \prod_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (X_{i0}^{mn}, X_{i0}^{mn}) > N \text{ und } \mu(A_0) = 0.$$

Wird nun $g' := \chi_{A_0} g$ gesetzt, so gilt neben $\{g' \neq g\} \subset A_0$

$$\{g' \leq r\} = A_0 + \{g \leq r\} = A_0 + A_r \text{ für rationales } r > 0, \text{ d.h.}$$

$$(23) \begin{cases} 0 \leq g' \leq g, \mu(\{g' \neq g\}) = 0 & \text{und} \\ \{g' \leq r\} = A_0 + A_r & \text{für rationales } r > 0. \end{cases}$$

$$3. M_i = \sum \mathcal{M}_i^n \text{ sei eine normale Zerlegung zu } \mu_i \upharpoonright \mathcal{K}_i.$$

Ferner sei für rationales r $X_i^r := \{f_i \leq r\}$ und für $n \in \mathbb{Z}$

$$Y_1^n := \{x_1 \in M_1 : \int_{M_2} g(x_1, x_2) d\mu_2 \leq n\}, Y_2^n := \{x_2 \in M_2 : \int_{M_1} g(x_1, x_2) d\mu_1 \leq n\}.$$

$$\mathcal{M}_i := \mathcal{K}(\{X_{i,r}^n : m, n \in \mathbb{Z}, r \geq 0 \text{ rational}\} + \{M_i^n : n \in \mathbb{Z}\} \\ + \{X_i^r : r \text{ rational}\} + \{Y_i^n : n \in \mathbb{Z}\})$$

ist dann ein abzählbarer Mengenkörper.

Mit $\mathcal{K}_i := \mathcal{M}_i \subset \mathcal{K}_i$ und $\mathcal{K} := \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}$ ist dabei $f_i \upharpoonright M_i$ $\mathcal{K}_i$ -meßbar und wegen (23) $g' \upharpoonright M$ $\mathcal{K}$ -meßbar, da die rationalen Zahlen dicht liegen.

$$\text{Die Maße } \nu_i(X_i) := \int_{X_i} f_i d\mu_i \text{ für } X_i \in \mathcal{K}_i$$

$$\text{und } \varrho(A) := \int_A g' d\mu \text{ für } A \in \mathcal{K}$$

erfüllen dann wegen (23) und nach [3.2] die in den Voraussetzungen von [5.3] geforderten Ungleichungen.

4. Mit $\varrho_1(X_1) := \varrho((X_1, M_2))$ und $\varrho_2(X_2) := \varrho((M_1, X_2))$ ist außerdem $(M_i, \mathcal{K}_i, \varrho_i)$ ein normaler separabler Maßraum.

Denn wegen (23) gilt beispielsweise für $i = 1$

$$\varrho_1(X_1) = \int_{(X_1, M_2)} g' d\mu = \int_{X_1} \left(\int_{M_2} g(x_1, x_2) d\mu_2 \right) d\mu_1,$$

wobei das Maß μ_1 in M_1 die normale Zerlegung $M_1 = \sum \mathcal{M}_1^n$ besitzt,

und der zugehörige Integrand wegen $g \in \mathcal{Y}(\mu_1, \mu_2)$ μ_1 -fast endlich sowie auf den Mengen $Y_1^n \in \mathcal{M}_1$ beschränkt ist.

Also existiert im Mengenkörper M_1 eine normale Zerlegung zu

$\rho_1 \mid \mathcal{H}_1$, und daher ist $\{X_1 \in \mathcal{M}_1 : \rho_1(X_1) < \infty\}$ wegen (22) eine abzählbare dichte Teilmenge von $\{X_1 \in \mathcal{H}_1 : \rho_1(X_1) < \infty\}$.

5. Nach [5.3] ist also ein Maß $\nu \mid \mathcal{H}$ vorhanden mit

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu(A) \leq \rho(A) \quad \text{für } A \in \mathcal{H} \quad \text{und} \\ \nu((X_1, \mathcal{M}_2)) = \nu_1(X_1), \nu((\mathcal{M}_1, X_2)) = \nu_2(X_2) \quad \text{für } X_i \in \mathcal{H}_i. \end{array} \right.$$

Wegen der Normalität von $\rho \mid \mathcal{H}$ existiert daher nach dem Satz von Radon-Nikodym eine $\mathcal{H}$ -meßbare Funktion $h \mid \mathcal{M}$ mit $0 \leq h \leq 1$ und

$$\nu(A) = \int_A h \, d\rho = \int_A f \, d\mu \quad \text{für } A \in \mathcal{H} \quad \text{mit } f := g \cdot h.$$

Wegen $\mathcal{H} \subset \bar{\mathcal{K}}$ ist $f \mid \mathcal{M}$ dabei auch $\bar{\mathcal{K}}$ -meßbar und wegen (23) $0 \leq f \leq g$.

Ferner gilt wegen (24) für alle $X_1 \in \mathcal{H}_1$

$$\int_{X_1} \left(\int_{\mathcal{M}_2} f(x_1, x_2) \, d\mu_2 \right) d\mu_1 = \nu((X_1, \mathcal{M}_2)) = \nu_1(X_1) = \int_{X_1} f_1 \, d\mu_1;$$

da sowohl $f_1(x_1)$ als auch $\int_{\mathcal{M}_2} f(x_1, x_2) \, d\mu_2$, $\mathcal{H}_1$ -meßbar sind, folgt also

$$\int_{\mathcal{M}_2} f(x_1, x_2) \, d\mu_2 = f_1(x_1),$$

und Entsprechendes gilt bei Vertauschung von 1 und 2.

In diesem Zusammenhang liegt die Frage nahe, welche Paare

$(f_1, f_2) \in (\mathcal{Z}(\mu_1), \mathcal{Z}(\mu_2))$ sich ergeben, falls die Forderung $0 \leq f \leq g$ durch $g_1 \leq f \leq g_2$ mit $\bar{\mathcal{K}}$ -meßbaren Funktionen $g_1 \leq g_2$ ersetzt wird, wobei nun $\int_{\mathcal{M}_i} |g_i| \, d\mu < \infty$ für $i = 1, 2$ vorauszusetzen ist.

Anwendung von [5.4] auf die Funktionen $g := g_2 - g_1$ und

$$f_1'(x_1) := f_1(x_1) - \int_{\mathcal{M}_2} g_1(x_1, x_2) \, d\mu_2$$

$$f_2'(x_2) := f_2(x_2) - \int_{\mathcal{M}_1} g_1(x_1, x_2) \, d\mu_1$$

liefert durch einfache Rechnung die Bedingung

$$\left. \begin{array}{l} \int_{X_1} f_1 \, d\mu_1 \leq \left(\int_{(X_1, X_2)} g_2 \, d\mu - \int_{(X_1, X_2)} g_1 \, d\mu \right) + \int_{X_1} f_2 \, d\mu_2 \\ \int_{X_2} f_2 \, d\mu_2 \leq \left(\int_{(X_1, X_2)} g_2 \, d\mu - \int_{(X_1, X_2)} g_1 \, d\mu \right) + \int_{X_2} f_1 \, d\mu_1 \end{array} \right\} \quad \text{für } X_i \in \bar{\mathcal{K}}_i.$$

Im Anschluß an [5.4] ist noch eine weitere Folgerung möglich.

Erfüllen die Funktionen $f_i \mid \mathcal{M}_i$ die notwendige Bedingung

$$0 \leq f_1(x_1) \leq \int_{\mathcal{M}_2} g(x_1, x_2) \, d\mu_2, \quad 0 \leq f_2(x_2) \leq \int_{\mathcal{M}_1} g(x_1, x_2) \, d\mu_1$$

Für alle $x_i \in M_i$, so ist auch exakte Übereinstimmung erreichbar:

Satz 5.5. Es seien die Voraussetzungen von [5.4] gegeben.

Erfüllt dann $(f_1, f_2) \in (\mathcal{M}(\mu_1), \mathcal{M}(\mu_2))$ für $x_i \in M_i$ und $X_i \in \mathcal{K}_i$

$$0 \leq f_1(x_1) \leq \int_{M_2} g(x_1, x_2) d\mu_2, \quad \int_{M_1} f_1 d\mu_1 \leq \varphi_1(X_1; g, f_2),$$

$$0 \leq f_2(x_2) \leq \int_{M_1} g(x_1, x_2) d\mu_1, \quad \int_{M_2} f_2 d\mu_2 \leq \varphi_2(X_2; g, f_1),$$

so existiert eine $\bar{\mathcal{K}}$ -meßbare Funktion $f|M$ mit

$$0 \leq f \leq g \quad \text{und}$$

$$\int_{M_1} f(x_1, x_2) d\mu_2 = f_1(x_1), \quad \int_{M_2} f(x_1, x_2) d\mu_1 = f_2(x_2) \quad \text{für alle } x_i.$$

Beweis. Nach [5.4] existiert eine $\bar{\mathcal{K}}$ -meßbare Funktion $f^0|M$ derart,

daß $0 \leq f^0 \leq g$ und

$$\int_{M_2} f^0(x_1, x_2) d\mu_2 = f_1(x_1) \quad \text{für } x_1 \in \bar{N}_1 \in \bar{\mathcal{K}}_1 \text{ mit } \mu_1(N_1) = 0,$$

$$\int_{M_1} f^0(x_1, x_2) d\mu_1 = f_2(x_2) \quad \text{für } x_2 \in \bar{N}_2 \in \bar{\mathcal{K}}_2 \text{ mit } \mu_2(N_2) = 0.$$

Nach [5.1] existieren dann $\bar{\mathcal{K}}$ -meßbare Funktionen $f^l|M$ derart, daß

$$0 \leq f^1 \leq \chi_{(N_1, M_2)} g, \quad 0 \leq f^2 \leq \chi_{(M_1, N_2)} g \quad \text{und}$$

$$\int_{M_2} f^1(x_1, x_2) d\mu_2 = f_1(x_1) \quad \text{für } x_1 \in N_1 \quad (= 0 \text{ sonst}),$$

$$\int_{M_1} f^2(x_1, x_2) d\mu_1 = f_2(x_2) \quad \text{für } x_2 \in N_2 \quad (= 0 \text{ sonst}).$$

Die Funktion $f := \chi_{(\bar{N}_1, \bar{N}_2)} f^0 + \max_{l=1,2} f^l$

ist dann $\bar{\mathcal{K}}$ -meßbar und erfüllt die Ungleichung $0 \leq f \leq g$.

Die Richtigkeit der Integralbeziehungen für alle x_i folgt nun aus

$$\int_{M_i} f^{(l)}(x_1, x_2) d\mu_i = \int_{N_i} f^{(l)}(x_1, x_2) d\mu_i \quad \text{für } i = 1, 2. \quad \square$$

Von Interesse ist in diesem Zusammenhang, daß bei Verzicht auf die Forderung $f \leq g$ die Funktionen $f_i|M_i$ im wesentlichen beliebig vorgegeben werden können:

Satz 5.6. $(M, \bar{\mathcal{K}}, \mu)$ sei der Produktraum zweier normaler Maßräume

$(M_i, \bar{\mathcal{K}}_i, \mu_i)$ mit $\mu_i(M_i) > 0$.

Zu zwei Funktionen $f_i \in \mathcal{M}(\mu_i)$ mit $f_i \geq 0$ und

$$\int_{M_1} f_1 d\mu_1 = \int_{M_2} f_2 d\mu_2 =: r$$

existiert dann stets eine $\bar{\kappa}$ -meßbare Funktion $f|M$ mit $f \geq 0$ und

$$\int_{M_1} f(x_1, x_2) d\mu_2 = f_1(x_1), \quad \int_{M_1} f(x_1, x_2) d\mu_1 = f_2(x_2) \quad \text{für alle } x_i.$$

Beweis. 1. Fall: $\gamma = 0$.

Ist $X_i \in \bar{\kappa}_i$ mit $0 < \mu_i(X_i) < \infty$, so läßt sich wählen

$$f(x_1, x_2) := \frac{\chi_{X_1(x_1)}}{\mu_1(X_1)} f_1(x_1) + \frac{\chi_{X_2(x_2)}}{\mu_2(X_2)} f_2(x_2).$$

2. Fall: $0 < \gamma < \infty$.

Die Forderungen werden hier erfüllt von

$$f(x_1, x_2) := \frac{1}{\gamma} f_1(x_1) \cdot f_2(x_2).$$

3. Fall: $\gamma = \infty$.

Nach Voraussetzung existieren Zerlegungen $M_i = \sum_i M_i^n$ in $\bar{\kappa}_i$ mit

$$0 < \alpha_i^n < \infty \quad \text{für } \alpha_i^n := \int_{M_i^n} f_i d\mu_i.$$

Dabei läßt sich durch geeignete sukzessive Wahl der Mengen M_i^n wegen $\gamma = \infty$ ohne weiteres erreichen, daß

$$\beta_1^n \leq \beta_2^n \leq \beta_1^{n+1} \leq \beta_2^{n+1} \leq \dots \quad \text{für } \beta_i^n := \sum_{m \leq n} \alpha_i^m.$$

Die folgende Funktion ist daher nicht-negativ und $\bar{\kappa}$ -meßbar:

$$t(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{\beta_1^n - \beta_2^{n-1}}{\alpha_1^n \cdot \alpha_2^n} & \text{für } (x_1, x_2) \in (M_1^n, M_2^n) \\ \frac{\beta_2^n - \beta_1^{n-1}}{\alpha_1^{n-1} \cdot \alpha_2^n} & \text{für } (x_1, x_2) \in (M_1^{n-1}, M_2^n) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$f(x_1, x_2) := t(x_1, x_2) f_1(x_1) f_2(x_2)$ erfüllt dann die Forderungen, da

$$\begin{aligned} \int_{M_2} f(x_1, x_2) d\mu_2 &= f_1(x_1) \left[\frac{\beta_1^n - \beta_2^{n-1}}{\alpha_1^n \cdot \alpha_2^n} \int_{M_2^{n-1}} f_2 d\mu_2 + \frac{\beta_2^n - \beta_1^{n-1}}{\alpha_1^n \cdot \alpha_2^n} \int_{M_2^n} f_2 d\mu_2 \right] \\ &= \frac{f_1(x_1)}{\alpha_1^n} \left[(\beta_2^n - \beta_2^{n-1}) + (\beta_1^n - \beta_1^{n-1}) \right] = f_1(x_1) \quad \text{für } x_1 \in M_1^n, \\ \int_{M_1} f(x_1, x_2) d\mu_1 &= f_2(x_2) \left[\frac{\beta_1^n - \beta_2^{n-1}}{\alpha_1^n \cdot \alpha_2^n} \int_{M_1^{n-1}} f_1 d\mu_1 + \frac{\beta_2^n - \beta_1^{n-1}}{\alpha_1^{n-1} \cdot \alpha_2^n} \int_{M_1^n} f_1 d\mu_1 \right] \\ &= \frac{f_2(x_2)}{\alpha_2^n} \left[(\beta_1^n - \beta_1^{n-1}) + (\beta_2^n - \beta_2^{n-1}) \right] = f_2(x_2) \quad \text{für } x_2 \in M_2^n. \quad] \end{aligned}$$

Die Voraussetzung $\mu_i(M_i) > 0$ ist im übrigen nur im Fall $\gamma = 0$ von Bedeutung, da sie eine Folge von $\gamma > 0$ ist.

Abschließend wird nun gezeigt, daß in [5.3] unter sehr allgemeinen Voraussetzungen auf die Separabilität der beiden auftretenden

Maßräume verzichtet werden kann:

Satz 5.7. $(M_i, \mathcal{K}_i, \nu_i)$ sei ein beliebiger Maßraum ($i = 1, 2$) und φ ein Maß auf dem σ -Körper $\mathcal{K} := \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$ über der Grundmenge $M := (M_1, M_2)$ derart, daß $\varphi((X_1, M_2))$ bzw. $\varphi((M_1, X_2))$ ein normales Maß auf $\mathcal{K}_1$ bzw. $\mathcal{K}_2$ ist, und $\varphi \ll \mu_1 \times \mu_2$ mit normalen Maßen $\mu_i | \mathcal{K}_i$ gilt. Genügen dann die Maße $\nu_i | \mathcal{K}_i$ und $\varphi | \mathcal{K}$ der Bedingung (R), so existiert ein Maß $\nu | \mathcal{K}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\nu(A) \leq \varphi(A) \quad \text{für } A \in \mathcal{K} \quad \text{und}$$

$$\nu((X_1, M_2)) = \nu_1(X_1), \quad \nu((M_1, X_2)) = \nu_2(X_2) \quad \text{für } X_i \in \mathcal{K}_i.$$

Beweis. Da $\varphi | \mathcal{K}$ und $(\mu_1 \times \mu_2) | \mathcal{K}$ normal sind, existiert nach dem Satz von Radon-Nikodym eine $\mathcal{K}$ -meßbare Funktion $g | M$ mit $g \geq 0$ und

$$\varphi(A) = \int_A g \, d(\mu_1 \times \mu_2) \quad \text{für } A \in \mathcal{K};$$

dabei liegt $g | M$ in $\mathcal{G}(\mu_1, \mu_2)$, da wegen der Normalität der Maße $\varphi((X_1, M_2))$, $\varphi((M_1, X_2))$

$$\int_{M_2} g(x_1, x_2) d\mu_2 < \infty \quad \mu_1\text{-fast}, \quad \int_{M_1} g(x_1, x_2) d\mu_1 < \infty \quad \mu_2\text{-fast}.$$

Daneben sind auch die Maße $\nu_i | \mathcal{K}_i$ normal, da wegen (R)

$$\nu_1(X_1) \leq \varphi((X_1, M_2)) + \nu_2(\overline{M}_2), \quad \nu_2(X_2) \leq \varphi((M_1, X_2)) + \nu_1(\overline{M}_1);$$

aus diesen Ungleichungen folgt wegen $\varphi \ll \mu_1 \times \mu_2$ auch $\nu_i \ll \mu_i$, so daß nach dem Satz von Radon-Nikodym

$$\nu_i(X_i) = \int_{X_i} f_i \, d\mu_i \quad \text{für } X_i \in \mathcal{K}_i \quad \text{mit } f_i \in \mathcal{M}(\mu_i).$$

$f_i | M_i$ und $g | M$ erfüllen also alle Voraussetzungen von [5.4], da nach [3.2] auch

$$\int_{X_1} f_1 \, d\mu_1 \leq \varphi_1(X_1; g, f_2), \quad \int_{X_2} f_2 \, d\mu_2 \leq \varphi_2(X_2; g, f_1) \quad \text{für } X_i \in \mathcal{K}_i.$$

Wird $f | M$ diesem Satz entsprechend bestimmt, so besitzt das Maß $\nu(A) := \int_A f \, d(\mu_1 \times \mu_2)$ die geforderten Eigenschaften. ┘

§6. Der zweite Hauptsatz

Anwendung der Ergebnisse aus §5 auf die Funktion $g = \chi_A$ liefert für eine Teilmenge A des Produktraumes $(M, \bar{\mathcal{K}}, \mu)$ zweier Maßräume $(M_i, \bar{\mathcal{K}}_i, \mu_i)$ mit $\mu(A) < \infty$:

Zu zwei Funktionen $f_i \in \mathcal{K}(\mu_i)$, die der Bedingung (A) genügen, existiert stets eine $\bar{\mathcal{K}}$ -meßbare Funktion $f|M$ mit

$$\int_{M_2} f(x_1, x_2) d\mu_2 = f_1(x_1), \quad \int_{M_1} f(x_1, x_2) d\mu_1 = f_2(x_2),$$

wobei $0 \leq f(x_1, x_2) \leq 1$ für $(x_1, x_2) \in A$ und $f|\bar{A} = 0$.

Zu untersuchen ist also, ob sich die Funktion $f|A$ - etwa für atomlose Maße $\mu_i|\bar{\mathcal{K}}_i$ - ersetzen läßt durch eine Funktion, die nur die Werte 0 und 1 annimmt.

Dazu ist es zweckmäßig, allgemein für zwei $\bar{\mathcal{K}}$ -meßbare Funktionen $f|M$ und $g|M$ mit $0 \leq f \leq g$ folgende Gesamtheit zu definieren:

$\mathcal{A}(f, g)$ enthält genau jene Mengen $A \in \bar{\mathcal{K}}$, zu denen eine $\bar{\mathcal{K}}$ -meßbare Funktion $f'|M$ existiert mit den Eigenschaften

$$0 \leq f' \leq g, \quad f'|A = g|A \quad \text{und}$$

$$\int_{M_2} f'(x_1, x_2) d\mu_2 = \int_{\mu_1} f(x_1, x_2) d\mu_1, \quad \int_{M_1} f'(x_1, x_2) d\mu_1 = \int_{\mu_2} f(x_1, x_2) d\mu_2.$$

Mit Hilfe von [5.4] läßt sich $\mathcal{A}(f, g)$ sehr einfach beschreiben:

Satz 6.1. $(M, \bar{\mathcal{K}}, \mu)$ sei der Produktraum zweier normaler Maßräume $(M_i, \bar{\mathcal{K}}_i, \mu_i)$; ferner seien $f|M$ und $g|M$ $\bar{\mathcal{K}}$ -meßbar mit

$$0 \leq f \leq g \quad \text{und} \quad \int_M g \, d\mu < \infty.$$

Dann besteht $\mathcal{A}(f, g)$ aus allen Mengen $A \in \bar{\mathcal{K}}$ mit

$$\int_{A(X_i, X_2)} g \, d\mu \leq \int_{(X_i, X_2)} f \, d\mu + \int_{(\bar{X}_i, X_2)} (g - f) \, d\mu \quad \text{für } X_i \in \bar{\mathcal{K}}_i.$$

Beweis. Eine Menge $A \in \bar{\mathcal{K}}$ liegt in $\mathcal{A}(f, g)$ genau dann, wenn zu

$$f_1(x_1) := \int_{M_2} f(x_1, x_2) d\mu_2 - \int_{M_2} \chi_A g(x_1, x_2) d\mu_2$$

$$f_2(x_2) := \int_{M_1} f(x_1, x_2) d\mu_1 - \int_{M_1} \chi_A g(x_1, x_2) d\mu_1$$

eine $\bar{\mathcal{K}}$ -meßbare Funktion $h|M$ existiert mit $0 \leq h \leq \chi_A g$ und

$$\int_{M_2} h(x_1, x_2) d\mu_2 = f_1(x_1), \quad \int_{M_1} h(x_1, x_2) d\mu_1 = f_2(x_2).$$

Da sich wegen $\int_{M_1} g d\mu < \infty$ [3.2] anwenden läßt, ergibt [5.4] wegen

$\chi_{\bar{A}} g \in \mathcal{F}(\mu_1, \mu_2)$ als gleichwertige Bedingung für " $A \in \mathcal{N}(f, g)$ ":

$$(25) \quad 0 \leq f_i(x_i) < \infty \quad \mu_i\text{-fast} \quad (i = 1, 2)$$

$$(26) \quad \int_{M_1} f_1 d\mu_1 = \int_{M_2} f_2 d\mu_2 =: \gamma$$

$$(27) \quad \gamma \leq \int_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2)} \chi_{\bar{A}} g d\mu + \sum_{i=1,2} \int_{X_i} f_i d\mu_i \quad \text{für } X_i \in \bar{K}_i.$$

Die Gleichung (26) ist jedoch, da es sich lediglich um eine Vertauschung der Integrationsreihenfolge handelt, stets erfüllt (mit

$$\gamma = \int_{\bar{X}} f d\mu - \int_{\bar{X}} g d\mu).$$

Ferner folgt (25) aus (27) und $\gamma < \infty$; denn $X_2 = M_2$ bzw. $X_1 = M_1$ liefert

$$0 \leq \int_{X_i} f_i d\mu_i \quad \text{für } X_i \in \bar{K}_i.$$

Einsetzen von γ und $f_i|_{M_i}$ sowie eine einfache Umformung führen die Ungleichung (27) über in die angegebene Bedingung. ┘

Dieser Satz ermöglicht eine erste wichtige Aussage über $\mathcal{N}(f, g)$:

Satz 6.2. Es seien die Voraussetzungen von [6.1] gegeben.

Dann enthält $\mathcal{N}(f, g)$ eine Menge A_0 derart, daß für $A \in \mathcal{N}(f, g)$

$$\mu(A \bar{A}_0) = 0, \quad \text{falls } \mu(A_0 \bar{A}) = 0.$$

Beweis. 1. Nach [6.1] ist $0 \in \mathcal{N}(f, g)$, also $\mathcal{N}(f, g)$ nicht-leer.

$\mathcal{N}(f, g)$ läßt sich nun teilweise ordnen durch die Festsetzung:

$$A_1 \prec A_2 \quad \text{ist gleichwertig mit } \mu(A_1 \bar{A}_2) = 0;$$

denn neben $A \prec A$ gilt dann wegen $A_1 \bar{A}_2 \subset A_1 \bar{A}_2 + A_2 \bar{A}_3$,

$$A_1 \prec A_3, \quad \text{falls } A_1 \prec A_2 \quad \text{und} \quad A_2 \prec A_3.$$

2. Sei $\mathcal{L} \neq \emptyset$ eine linear geordnete Teilmenge von $\mathcal{N}(f, g)$.

Ist dann $M_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}} M_i^k$ eine normale Zerlegung zu $\mu_i|_{\bar{K}_i}$, so werde mit

$$M_{kl} := (M_1^k, M_2^l) \quad \text{für } k, l \in \mathbb{Z} \quad \text{definiert}$$

$$\alpha_{kl} := \sup_{B \in \mathcal{L}} \mu(B \cap M_{kl}) < \infty;$$

es existieren also Folgen $B_{kl}^n \in \mathcal{L}$ mit

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_{kl}^n \cap M_{kl}) = \alpha_{kl} \quad \text{für } k, l \in \mathbb{Z}.$$

Sei nun $B_1, B_2, \dots$ eine einfache Anordnung der Mengen B_{kl}^n und

$$T := \{n \in \mathbb{Z} : B_m \prec B_n \text{ für } m < n\};$$

$B_0 := \sum_T B_n \in \mathcal{K}$ ist dann endliche oder abzählbare Vereinigung einer - abgesehen von Nullmengen - aufsteigenden Folge von Mengen aus $\mathcal{A}(f, g)$, also nach [6.1] selbst in $\mathcal{A}(f, g)$ enthalten.

3. Für zwei Mengen $B, B' \in \mathcal{X}$ gilt stets eine der Relationen $B \prec B'$, $B' \prec B$ und daher die Ungleichung

$$\begin{aligned} \mu(B \mathbb{M}_{kl} \overline{B'}) + \mu(B' \mathbb{M}_{kl}) &= \mu((B + B') \mathbb{M}_{kl}) \\ &= \max \{ \mu(B \mathbb{M}_{kl}), \mu(B' \mathbb{M}_{kl}) \} \leq \alpha_{kl}. \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen (28) mit $B_{kl} := \sum_{n \in \mathbb{Z}} B_{kl}^n \in \mathcal{K}$ für beliebiges $B \in \mathcal{X}$

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu(B \mathbb{M}_{kl} \overline{B_{kl}}) &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu(B \mathbb{M}_{kl} \overline{B_{kl}^n}) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_{kl} - \mu(B_{kl}^n \mathbb{M}_{kl})) = 0 \quad \text{für } k, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \right.$$

Da ferner zu B_{kl}^n stets $m \in T$ mit $B_{kl}^n \prec B_m$ existiert, gilt

$$\begin{aligned} \mu(B_{kl}^n \overline{B_0}) &\leq \mu(B_{kl}^n \overline{B_m}) = 0, \text{ d.h.} \\ \mu(B_{kl} \overline{B_0}) &\leq \sum_{\mathbb{Z}} \mu(B_{kl}^n \overline{B_0}) = 0 \text{ für } k, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Zusammen mit (29) folgt nun sofort $B \prec B_0$, da

$$\mu(B \overline{B_0}) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \mu(B \mathbb{M}_{kl} \overline{B_0}) \leq \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} (\mu(B \mathbb{M}_{kl} \overline{B_{kl}}) + \mu(B_{kl} \overline{B_0})) = 0.$$

4. Demnach besitzt jede linear geordnete Teilmenge der teilweise geordneten Menge $\mathcal{A}(f, g)$ eine obere Schranke in $\mathcal{A}(f, g)$. Nach dem Zornschen Lemma enthält $\mathcal{A}(f, g)$ also ein maximales Element A_0 ; daher gilt für $A \in \mathcal{A}(f, g)$

$$\mu(A \overline{A_0}) = 0, \text{ falls } \mu(A, \overline{A}) = 0. \quad \square$$

In [2.5] wurde gezeigt, daß eine Menge $A \in \mathcal{K}$ mit positivem Maß nicht notwendig μ -fast ein Rechteck positiven Maßes enthält.

In stark abgeschwächter Form gilt jedoch:

Satz 6.3. $(M, \mathcal{K}, \mu)$ sei der Produktraum zweier normaler Maßräume $(M_1, \mathcal{K}_1, \mu_1)$.

Dann existiert zu $A \in \mathcal{K}$ mit $\mu(A) > 0$ und zu $\varepsilon > 0$ stets ein Rechteck $R = (X_1, X_2) \in \mathcal{K}$ derart, daß

$$0 < \mu(AR) \leq \mu(R) < \infty \quad \text{und}$$

$$\mu_2((AR)_{x_1}) \geq (1-\varepsilon)\mu_2(R_{x_1}), \quad \mu_1((AR)_{x_2}) \geq (1-\varepsilon)\mu_1(R_{x_2}) \quad \text{für } x_i \in M_i.$$

Beweis. 1. Für zwei Mengen $A_1, A_2 \in \mathcal{K}$ gelte mit $0 \leq \delta < 1$

$$\mu(A_1 R) \leq \delta \mu(A_2 R) \quad \text{für } R \in \mathcal{K} := \{(X_1, X_2) : X_i \in \mathcal{K}_i\}.$$

Die Maße $\nu(B) := \mu(A_1 B)$ und $\nu'(B) := \delta \mu(A_2 B)$ auf $\mathcal{K}$ besitzen dann wegen der Normalität von μ_i auf $\mathcal{K}_i$ eine normale Zerlegung im Mengenkörper $\mathcal{M} := \mathcal{K}$ und erfüllen auch dort $\nu(B) \leq \nu'(B)$.

Nach (20) im Beweis von [5.3] gilt also

$$\nu(B) \leq \nu'(B) \quad \text{für } B \in \mathcal{M} = \mathcal{K}.$$

Für jede Menge $B \in \mathcal{A}_1 \mathcal{K}$ mit endlichem Maß folgt daraus

$$\mu(B) = \nu(B) \leq \nu'(B) = \delta \mu(A_2 B) \leq \delta \mu(B), \quad \text{d.h. } \mu(B) = 0.$$

Angewendet auf $A_1 = A$ und $A_2 = M$ ergibt das:

Zu $\delta < 1$ existiert $R \in \mathcal{K}$ mit $\mu(AR) > \delta \mu(R)$.

2. Zu $\varepsilon \in (0, 1)$ ist daher ein Rechteck $R^0 = (X_1^0, X_2^0) \in \mathcal{K}$

vorhanden mit $\mu(AR^0) > (1 - \frac{\varepsilon}{4}) \cdot \mu(R^0)$;

daraus folgt insbesondere $\mu_i(X_i^0) > 0$ und damit $\mu_i(X_i^0) < \infty$.

Mit $Y_1^0 := \{x_1 \in X_1^0 : \mu_2((AR^0)_{x_1}) < (1 - \frac{\varepsilon}{2})\mu_2(R_{x_1}^0)\} \in \mathcal{K}_1$

und $Y_2^0 := \{x_2 \in X_2^0 : \mu_1((AR^0)_{x_2}) < (1 - \frac{\varepsilon}{2})\mu_1(R_{x_2}^0)\} \in \mathcal{K}_2$ gilt nun

$$\begin{aligned} (1 - \frac{\varepsilon}{4})\mu_1(X_1^0)\mu_2(X_2^0) &< \mu(AR^0) = \int_{X_1^0} \mu_2((AR^0)_{x_1}) d\mu_1 \\ &\leq \mu_1(Y_1^0)(1 - \frac{\varepsilon}{2})\mu_2(X_2^0) + \mu_1(X_1^0 - Y_1^0)\mu_2(X_2^0) \\ &= \mu_1(X_1^0)\mu_2(X_2^0) - \frac{\varepsilon}{2}\mu_1(Y_1^0)\mu_2(X_2^0). \end{aligned}$$

Daraus folgt durch einfache Rechnung (für $i = 2$ entsprechend)

$$(30) \quad \mu_i(Y_i^0) < \frac{\varepsilon}{2}\mu_i(X_i^0).$$

3. $R := (X_1^0 - Y_1^0, X_2^0 - Y_2^0) \in \mathcal{K}$ ist dann ein geeignetes Rechteck.

Denn für $x_1 \in X_1^0 - Y_1^0$ gilt wegen (30)

$$\begin{aligned} \mu_2((AR)_{x_1}) &= \mu_2((AR^0)_{x_1}) - \mu_2(A_{x_1} Y_2^0) > (1 - \frac{\varepsilon}{2})\mu_2(R_{x_1}^0) - \frac{\varepsilon}{2}\mu_2(X_2^0) \\ &= (1 - \varepsilon)\mu_2(R_{x_1}^0) \geq (1 - \varepsilon)\mu_2(R_{x_1}), \end{aligned}$$

während für $x_1 \notin X_1^0 - Y_1^0$ nichts zu beweisen ist.

Entsprechend ergibt sich die Ungleichung für $i = 2$.

Wegen $\mu(R) \leq \mu(R^0) < \infty$ bleibt also nur $\mu(AR) > 0$ zu zeigen.

Aus der soeben bewiesenen Ungleichung folgt aber wegen (30)

$$\mu(AR) \geq \mu_1(X_1^0 - Y_1^0)(1 - \varepsilon) \mu_2(X_2^0 - Y_2^0) \geq (1 - \varepsilon) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \prod_{i=1,2} \mu_i(X_i^0) > 0. \quad \square$$

Zu Beginn des Beweises wurde insbesondere gezeigt, daß

$$\mu(B(X_1, X_2)) \leq \delta \mu(A(X_1, X_2)) \quad \text{für } X_i \in \bar{K}_i$$

im Fall $\delta < 1$ stets $\mu(B) = 0$ zur Folge hat.

Als einen gewissen Ausgleich liefert [6.3] jedoch folgenden wesentlichen Satz:

Satz 6.4. $(M, \bar{K}, \mu)$ sei der Produktraum zweier atomloser normaler Maßräume $(M_i, \bar{K}_i, \mu_i)$.

Dann existiert zu $A \in \bar{K}$ mit $\mu(A) > 0$ und zu $\varepsilon > 0$ stets eine Menge $B \in \bar{K}$ mit $\mu(B) > 0$ derart, daß

$$\mu(B(X_1, X_2)) \leq \varepsilon \mu(A[(\bar{X}_1, X_2) + (\bar{X}_1, \bar{X}_2)]) \quad \text{für } X_i \in \bar{K}_i.$$

Beweis. 1. Zunächst sei $\varepsilon = \frac{1}{3}$ angenommen.

Nach [6.3] existiert ein Rechteck $R = (X_1^0, X_2^0) \in \bar{K}$ derart, daß

$$0 < \mu(AR) \leq \mu(R) < \infty \quad \text{und}$$

$$\mu_2((AR)_{x_1}) \geq (1 - \frac{1}{8}) \mu_2(R_{x_1}), \mu_1((AR)_{x_2}) \geq (1 - \frac{1}{8}) \mu_1(R_{x_2}) \quad \text{für } x_i \in M_i.$$

Es genügt dann offensichtlich, die Behauptung zu beweisen für

$$M'_i := X_i^0, \bar{K}'_i := X_i^0 \bar{K}_i, \mu'_i(X'_i) := \frac{1}{\mu_i(X_i^0)} \mu_i(X'_i) \quad \text{und} \quad A' := AR \in \bar{K}'_1 \times \bar{K}'_2.$$

2. Sei also $\mu_i|_{\bar{K}_i}$ atomlos mit $\mu_i(M_i) = 1$ und $A \in \bar{K}$ mit

$$\mu_2(A_{x_1}) \geq 1 - \frac{1}{8}, \mu_1(A_{x_2}) \geq 1 - \frac{1}{8} \quad \text{für } x_i \in M_i.$$

Nach [2.2] existieren dann Zerlegungen $M_i = \sum_{1 \leq n \leq \aleph} M_i^n$ in $\bar{K}_i$ mit

$\mu_i(M_i^n) = \frac{1}{8}$ und daher wegen $\mu(A) > 0$ Mengen $Y_i \in \bar{K}_i$ derart, daß

$$\mu_i(Y_i) = \frac{1}{8} \quad \text{und} \quad \mu(B) > 0 \quad \text{für } B := A(Y_1, Y_2) \in \bar{K}.$$

B erfüllt nun außerdem die geforderte Ungleichung.

Um das nachzuweisen, sei $X_i \in \bar{K}_i$ beliebig gewählt.

1. Fall: $\mu_1(X_1) \geq \frac{1}{2}$ oder $\mu_2(X_2) \geq \frac{1}{2}$.

Ist etwa $\mu_1(X_1) \geq \frac{1}{2}$, so folgt für beliebiges $x_2 \in M_2$

$$\mu_1(A_{x_1} X_1) \geq \mu_1(X_1) - \mu_1(\bar{A}_{x_1}) \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}, \text{ d.h.}$$

$$3\mu(B(X_1, X_2)) \leq 3\mu((X_1, Y_1, X_2, Y_2)) \leq 3\mu_1(Y_1)\mu_2(X_2) = \frac{3}{8}\mu_2(X_2) \\ \leq \int_{X_2} \mu_1(A_{X_2} X_1) d\mu_2 = \mu(A(X_1, X_2)) \leq \mu(A[(X_1, X_2) + (\bar{X}_1, \bar{X}_2)]).$$

2. Fall: $\mu_1(X_1) < \frac{1}{2}$ und $\mu_2(X_2) < \frac{1}{2}$.

Wie im 1. Fall folgt hier für beliebiges $x_2 \in M_2$

$$\mu_1(A_{x_2} \bar{X}_1) \geq \frac{3}{8}, \text{ d.h.}$$

$$3\mu(B(X_1, X_2)) \leq 3\mu((Y_1, Y_2)) = 3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \leq \frac{3}{8}\mu_2(\bar{X}_2) \\ \leq \int_{X_2} \mu_1(A_{x_2} \bar{X}_1) d\mu_2 = \mu(A(\bar{X}_1, \bar{X}_2)) \leq \mu(A[(X_1, X_2) + (\bar{X}_1, \bar{X}_2)]).$$

3. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig.

Dann existiert nach den bisherigen Überlegungen eine Folge $B_n \in \bar{K}$ mit $A = B_0 > B_1 > \dots$, $\mu(B_n) > 0$ und

$$\mu(B_{n+1}(X_1, X_2)) \leq \frac{1}{3}\mu(B_n[(X_1, X_2) + (\bar{X}_1, \bar{X}_2)]) \quad \text{für } X_i \in \bar{K}_i, \text{ d.h.} \\ \mu(B_m[(X_1, X_2) + (\bar{X}_1, \bar{X}_2)]) \leq \frac{2}{3}\mu(B_{m-1}[(X_1, X_2) + (\bar{X}_1, \bar{X}_2)]), \text{ so daß} \\ \mu(B_{n+1}(X_1, X_2)) \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu(A[(X_1, X_2) + (\bar{X}_1, \bar{X}_2)]) \quad \text{für } X_i \in \bar{K}_i.$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ folgt daraus die Behauptung. $\square$

Genau hier spielt die Atomlosigkeit der Maße $\mu_i | \bar{K}_i$ eine Rolle.

Denn ist etwa $A = (X_1^0, M_2)$ mit einem Atom $X_1^0 \in \bar{K}_1$ positiven Maßes, so folgt aus der Ungleichung

$$\mu(B(X_1, X_2)) \leq \varepsilon \mu(A[(X_1, X_2) + (\bar{X}_1, \bar{X}_2)]) \quad \text{für } X_i \in \bar{K}_i,$$

daß für Mengen $X_1 \in X_1^0 \bar{K}_1$ mit $\mu_1(X_1) > 0$ und $X_2 \in \bar{K}_2$ wegen

$$\mu(A(\bar{X}_1, \bar{X}_2)) = \mu((X_1^0 - X_1, \bar{X}_2)) = \mu_1(X_1^0 - X_1)\mu_2(\bar{X}_2) = 0 \text{ stets} \\ \mu(B(X_1, X_2)) \leq \varepsilon \mu(A(X_1, X_2)),$$

wobei diese Ungleichung auch für $\mu_1(X_1) = 0$ gilt.

Ist also $B \in A\bar{K}$, so ergeben die Überlegungen nach [6.3], angewendet auf die σ -Körper $X_1^0 \bar{K}_1$ und $\bar{K}_2$, für $\varepsilon < 1$ sofort $\mu(B) = 0$.

[6.4] ermöglicht eine zweite wichtige Aussage über die zu Beginn definierte Gesamtheit $\mathcal{A}(f, g)$:

Satz 6.5. Es seien die Voraussetzungen von [6.1] gegeben.

Ist dann zusätzlich $\mu_i | \bar{K}_i$ atomlos und $\int_M f d\mu > 0$, so enthält $\mathcal{A}(f, g)$ eine Menge $A_0 \subset \{g > 0\}$ mit $\mu(A_0) > 0$.

Beweis. Ist $\mu(\{0 < f = g\}) > 0$, so besitzt $A_0 := \{0 < f = g\}$ die gewünschte Eigenschaft.

Andernfalls folgt aus $0 < \int_M f \, d\mu \leq \int_M g \, d\mu < \infty$,

$$\mu(\{0 < f < g < \infty\}) \geq \mu(\{0 < f \leq g\}) - \mu(\{0 < f = g\}) - \mu(\{g = \infty\}) > 0, \text{ so da\ss wegen}$$

$$\{0 < f < g < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f < g - \frac{1}{n}\} \cap \{g < n\}$$

mit geeignetem n ,

$$\mu(C_0) > 0 \quad \text{für } C_0 := \left\{ \frac{1}{n_0} < f < g - \frac{1}{n_0} \right\} \cap \{g < n_0\} \in \bar{\mathcal{K}}.$$

Wegen der Atomlosigkeit von $\mu_i | \bar{\mathcal{K}}_i$ existiert dann nach [6.4] eine Menge $A_0 \in C_0 \bar{\mathcal{K}}$ mit $\mu(A_0) > 0$ derart, da\ss

$$\begin{aligned} \mu(A_0(X_1, X_2)) &\leq \frac{1}{n_0} \mu(C_0[(X_1, X_2) + (\bar{X}_1, \bar{X}_2)]) \quad \text{für } X_i \in \bar{\mathcal{K}}_i, \text{ d.h.} \\ \int_{A_0(X_1, X_2)} g \, d\mu &\leq n_0 \mu(A_0(X_1, X_2)) \leq \frac{1}{n_0} \mu(C_0(X_1, X_2)) + \frac{1}{n_0} \mu(C_0(\bar{X}_1, \bar{X}_2)) \\ &\leq \int_{C_0(X_1, X_2)} f \, d\mu + \int_{C_0(\bar{X}_1, \bar{X}_2)} (g - f) \, d\mu \leq \int_{(X_1, X_2)} f \, d\mu + \int_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2)} (g - f) \, d\mu. \end{aligned}$$

Nach [6.1] liegt A_0 also in $\mathcal{A}(f, g)$; daneben gilt

$$A_0 \subset C_0 \subset \{g > \frac{1}{n_0}\} \subset \{g > 0\}. \quad \text{┘}$$

Jetzt lä\ss t sich der zweite Hauptsatz beweisen:

Satz 6.6. $(M, \bar{\mathcal{K}}, \mu)$ sei der Produktraum zweier atomloser normaler Ma\ss räume $(M_i, \bar{\mathcal{K}}_i, \mu_i)$; ferner seien $f | M$ und $g | M \bar{\mathcal{K}}$ -me\ss bar mit $0 \leq f \leq g$.

Ist dann $g | M$ μ -fast endlich, so existiert eine Menge $A \in \bar{\mathcal{K}}$ mit

$$\int_{A_1} \chi_A g(x_1, x_2) \, d\mu_2 = \int_{A_1} f(x_1, x_2) \, d\mu_2, \quad \int_{A_1} \chi_A g(x_1, x_2) \, d\mu_1 = \int_{A_1} f(x_1, x_2) \, d\mu_1.$$

Beweis. 1. Zunächst werde $\int_M g \, d\mu < \infty$ vorausgesetzt.

Nach [6.2] enthält dann $\mathcal{A}(f, g)$ eine Menge A_0 derart, da\ss

$$(31) \quad \mu(A \bar{A}_0) = 0, \text{ falls } A \in \mathcal{A}(f, g) \text{ und } \mu(A_0 \bar{A}) = 0.$$

Zu A_0 existiert eine $\bar{\mathcal{K}}$ -me\ss bare Funktion $f_0 | M$ derart, da\ss

$$0 \leq f_0 \leq g, \quad A_0 \subset \{f_0 = g\} \quad \text{und}$$

$$\int_{A_1} f_0(x_1, x_2) \, d\mu_2 = \int_{A_1} f(x_1, x_2) \, d\mu_2, \quad \int_{A_1} f_0(x_1, x_2) \, d\mu_1 = \int_{A_1} f(x_1, x_2) \, d\mu_1.$$

Es genügt nun der Nachweis von $\int_{A_0} f_0 \, d\mu = 0$;

denn dann ist $\mu(\{f_0 + \chi_{A_0} g\}) \leq \mu(\overline{A_0}\{f_0 > 0\}) = 0$,
so daß sich $A = A_0$ wählen läßt.

Die Annahme $\int_{A_0} f_0 d\mu > 0$ ergibt bei Anwendung von [6.5] die Existenz
einer Menge $C_0 \in \mathcal{A}(\chi_{A_0} f_0, \chi_{A_0} g)$ mit $C_0 \subset \{\chi_{A_0} g > 0\}$ und $\mu(C_0) > 0$.

Zu C_0 existiert eine $\bar{\mathcal{K}}$ -meßbare Funktion $h_0|_M$ mit

$$0 \leq h_0 \leq \chi_{A_0} g, \quad C_0 \subset \{h_0 = \chi_{A_0} g\} \quad \text{und}$$

$$\int_{M_2} h_0(x_1, x_2) d\mu_2 = \int_{M_2} \chi_{A_0} f_0(x_1, x_2) d\mu_2,$$

$$\int_{M_1} h_0(x_1, x_2) d\mu_1 = \int_{M_1} \chi_{A_0} f_0(x_1, x_2) d\mu_1;$$

daher ist $A := \{\chi_{A_0} f_0 + \chi_{A_0} h_0 = g\} \in \mathcal{A}(f, g)$.

Das steht jedoch im Widerspruch zu (31), da wegen $A_0 \subset A$ und $C_0 \subset A\overline{A_0}$

$$\mu(A, \overline{A}) = 0 \quad \text{und} \quad \mu(A\overline{A_0}) > 0.$$

2. Da $\mu|_{\bar{\mathcal{K}}}$ normal und $g|_M$ μ -fast endlich ist, existiert im
allgemeinen Fall eine Zerlegung $M = \sum_n C_n$ in $\bar{\mathcal{K}}$ mit $\int_{C_n} g d\mu < \infty$.

Zu $f_n := \chi_{C_n} f$ und $g_n := \chi_{C_n} g$ existieren dann wegen $\int_M g_n d\mu < \infty$ Mengen
 $A_n \in \bar{\mathcal{K}}$ derart, daß

$$\int_{M_2} \chi_{A_n} g_n(x_1, x_2) d\mu_2 = \int_{M_2} f_n(x_1, x_2) d\mu_2,$$

$$\int_{M_1} \chi_{A_n} g_n(x_1, x_2) d\mu_1 = \int_{M_1} f_n(x_1, x_2) d\mu_1;$$

dabei läßt sich $A_n \subset C_n$ annehmen.

Da abzählbare Vereinigungen von Nullmengen selbst Nullmengen
sind, folgt also für $A := \sum_n A_n \in \bar{\mathcal{K}}$

$$\begin{aligned} \int_{M_2} \chi_A g(x_1, x_2) d\mu_2 &= \sum_n \int_{M_2} \chi_{A_n} g(x_1, x_2) d\mu_2 \\ &= \sum_n \int_{M_2} f_n(x_1, x_2) d\mu_2 = \int_{M_2} f(x_1, x_2) d\mu_2, \end{aligned}$$

und Entsprechendes gilt bei Vertauschung von 1 und 2. ┘

Hier ist für beschränkte Funktionen $g|_M$ ebenso, wie es später
in [7.2] geschieht, mittels Verwendung von [3.1] exakte Überein-
stimmung erreichbar; dieses Ergebnis läßt sich dann ähnlich wie
im letzten Beweis auf den Fall $g < \infty$ ausdehnen.

Im folgenden wird diese Verschärfung jedoch nicht benötigt.

Es seien noch zwei besonders anschauliche Fälle angeführt, die sich durch Spezialisierung von [6.6] ergeben:

Satz 6.7. Unter den Voraussetzungen von [6.6] gilt:

1. Ist $0 \leq \varphi \leq 1$, so existiert eine Menge $A \in \bar{\mathcal{K}}$ mit

$$\int_{A_{X_1}} g(x_1, x_2) d\mu_2 = \varphi \int_{M_1} g(x_1, x_2) d\mu_2, \quad \int_{A_{X_1}} g(x_1, x_2) d\mu_1 = \varphi \int_{M_1} g(x_1, x_2) d\mu_1.$$

2. Ist $0 \leq f \leq \varphi < \infty$, so existiert eine Menge $A \in \bar{\mathcal{K}}$ mit

$$\int_{A_{X_1}} f(x_1, x_2) d\mu_2 = \int_{M_1} f(x_1, x_2) d\mu_2, \quad \int_{A_{X_1}} f(x_1, x_2) d\mu_1 = \int_{M_1} f(x_1, x_2) d\mu_1.$$

Beweis. Die Behauptung ist eine unmittelbare Folge von [6.6], wobei in 1. $f := \varphi g$ und in 2. $g := f$ zu setzen ist. ┐

Außerdem gestattet [6.6] im Fall atomloser Maße $\mu_i | \bar{\mathcal{K}}$, eine wesentliche Verschärfung von [5.7]:

Satz 6.8. Es seien die Voraussetzungen von [5.7] gegeben, wobei zusätzlich die Maße $\mu_i | \bar{\mathcal{K}}$ atomlos seien.

Erfüllen dann die Maße $\nu_i | \bar{\mathcal{K}}$ und $\varphi | \bar{\mathcal{K}}$ die Bedingung (R), so existiert eine Menge $A_0 \in \bar{\mathcal{K}}$ derart, daß

$$\nu((X_1, M_2)) = \nu_1(X_1), \quad \nu((M_1, X_2)) = \nu_2(X_2) \quad \text{für } X_i \in \bar{\mathcal{K}},$$

mit dem Maß $\nu(A) := \varphi(A_0 A)$.

Beweis. Nach [5.7] existiert jedenfalls ein Maß $\nu' | \bar{\mathcal{K}}$, das neben den geforderten Gleichungen $\nu'(A) \leq \varphi(A)$ für $A \in \bar{\mathcal{K}}$ erfüllt.

Da ν', φ und $\mu_1 \times \mu_2$ normale Maße auf $\bar{\mathcal{K}}$ mit $\varphi < \mu_1 \times \mu_2$ sind, existieren also $\bar{\mathcal{K}}$ -meßbare Funktionen $f|M$ und $g|M$ derart, daß

$0 \leq f \leq g$, g $(\mu_1 \times \mu_2)$ -fast endlich und

$$\nu'(A) = \int_A f d(\mu_1 \times \mu_2), \quad \varphi(A) = \int_A g d(\mu_1 \times \mu_2) \quad \text{für } A \in \bar{\mathcal{K}}.$$

Da die Maße $\mu_i | \bar{\mathcal{K}}$ atomlos sind, existiert ferner nach [6.6] eine Menge $A_0 \in \bar{\mathcal{K}}$ derart, daß mit $\nu(A) := \int_{A A_0} g d(\mu_1 \times \mu_2)$

$$\nu((X_1, M_2)) = \nu'((X_1, M_2)) = \nu_1(X_1) \quad \text{für } X_1 \in \bar{\mathcal{K}},$$

$$\nu((M_1, X_2)) = \nu'((M_1, X_2)) = \nu_2(X_2) \quad \text{für } X_2 \in \bar{\mathcal{K}}.$$

Wegen $\nu(A) = \varphi(A_0 A)$ ist die Menge A_0 also geeignet. ┐

§7. Die Gesamtheit der Schnittmaß-Funktionen

Die beiden Hauptsätze aus §5 und §6 führen zu weitreichenden Aussagen über die Gesamtheit der Schnittmaß-Funktionen von Teilmengen einer festen Menge, mit deren Hilfe sich insbesondere alle in §3 aufgetretenen Probleme lösen lassen.

Für eine meßbare Teilmenge A des Produktraumes $(M, \bar{K}, \mu)$ zweier gegebener Maßräume $(M_i, \bar{K}_i, \mu_i)$ sei zunächst allgemein

$$\mathcal{J}(A) := \{(\mu_2(B_{x_1}), \mu_1(B_{x_2})) : B \in A\bar{K}\}.$$

Um sicherzustellen, daß es sich dabei um eine Teilmenge von $(\mathcal{M}(\mu_1), \mathcal{M}(\mu_2))$ handelt, ist $\chi_A \in \mathcal{G}(\mu_1, \mu_2)$ vorauszusetzen.

Diese Forderung erfüllen genau die Mengen aus der Gesamtheit

$$\mathcal{G}(\mu_1, \mu_2) := \{A \in \bar{K} : \mu_2(A_{x_1}) < \infty \text{ } \mu_1\text{-fast, } \mu_1(A_{x_2}) < \infty \text{ } \mu_2\text{-fast}\},$$

also insbesondere Mengen endlichen Maßes.

Von Bedeutung ist nun vor allem folgende Beschreibung von $\mathcal{J}(A)^*$:

Satz 7.1. $(M, \bar{K}, \mu)$ sei der Produktraum zweier atomloser normaler Maßräume $(M_i, \bar{K}_i, \mu_i)$; ferner sei A eine feste Menge aus $\mathcal{G}(\mu_1, \mu_2)$. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für $(f_1, f_2) \in \mathcal{J}(A)$ ist dann neben $(f_1, f_2) \in (\mathcal{M}(\mu_1), \mathcal{M}(\mu_2))$ das Bestehen der Ungleichungen

$$\begin{aligned} \int_{x_1} f_1 d\mu_1 &\leq \int_{x_2} \min \{f_2(x_2), \mu_1(A_{x_2} x_1)\} d\mu_2 && \text{für } x_1 \in \bar{K}_1, \\ \int_{x_2} f_2 d\mu_2 &\leq \int_{x_1} \min \{f_1(x_1), \mu_2(A_{x_1} x_2)\} d\mu_1 && \text{für } x_2 \in \bar{K}_2. \end{aligned}$$

Beweis. 1. Ist $(f_1, f_2) = (\mu_2(B_{x_1}), \mu_1(B_{x_2}))$ mit $B \in A\bar{K}$, so ergibt

*) Nach Abschluß der Arbeit wurde dem Verfasser bekannt:

G.Lorentz, A problem of plane measure.

Amer. Journ. Math. 71, 417-426 (1949).

In diesem Aufsatz wird folgender Spezialfall untersucht:

$(M_i, \bar{K}_i, \mu_i) = (R_i, \mathcal{L}_i, \lambda_i)$ für $i = 1, 2$; $A = R_2$; $f_i \in \mathcal{L}(\lambda_i)$;

als Ergebnis wird eine Bedingung für $(f_1, f_2) \in \mathcal{J}(A)$ mit Hilfe der "monotone rearrangements" der f_i und deren "Inversen" angegeben.

$A \in \mathcal{G}(\mu_1, \mu_2)$ sofort $(f_1, f_2) \in (\mathcal{M}(\mu_1), \mathcal{M}(\mu_2))$.

Aus $\mu_1(B_{x_1} X_1) \leq \min\{\mu_1(B_{x_1}), \mu_1(A_{x_1} X_1)\}$ für $x_1 \in \bar{K}_1$

ergibt sich ferner die Ungleichung für $i = 1$

$$\begin{aligned} \int_{x_1} f_1 d\mu_1 &= \mu(B(X_1, M_1)) = \int_{M_1} \mu_1(B_{x_1} X_1) d\mu_2 \\ &\leq \int_{M_1} \min\{f_2(x_2), \mu_1(A_{x_1} X_1)\} d\mu_2; \end{aligned}$$

da Entsprechendes für $i=2$ gilt, ist die Bedingung also notwendig.

2. Sei nun umgekehrt die angegebene Bedingung erfüllt.

Wegen $\chi_A \in \mathcal{G}(\mu_1, \mu_2)$ existiert nach [5.4] zu $(f_1, f_2) \in (\mathcal{M}(\mu_1), \mathcal{M}(\mu_2))$ eine $\bar{K}$ -meßbare Funktion $f|M$ mit $0 \leq f \leq \chi_A$ derart, daß

$$\int_{M_1} f(x_1, x_2) d\mu_2 = f_1(x_1), \quad \int_{M_1} f(x_1, x_2) d\mu_1 = f_2(x_1).$$

Wegen der Atomlosigkeit der Maße $\mu_i | \bar{K}_i$ existiert ferner nach [6.6] zu $f|M$ und $\chi_A | M$ eine Menge $A_0 \in \bar{K}$ derart, daß

$$\begin{aligned} \int_{M_1} \chi_{A_0} \chi_A(x_1, x_2) d\mu_2 &= \int_{M_1} f(x_1, x_2) d\mu_2, \\ \int_{M_1} \chi_{A_0} \chi_A(x_1, x_2) d\mu_1 &= \int_{M_1} f(x_1, x_2) d\mu_1. \end{aligned}$$

Für $B := A_0 A \in A\bar{K}$ gilt dann $(\mu_2(B_{x_1}), \mu_1(B_{x_1})) = (f_1, f_2)$. ┘

Nach [3.2] ist damit insbesondere gezeigt, daß die früher formulierte Bedingung (A) bei atomlosen Maßen $\mu_i | \bar{K}_i$ tatsächlich für die Existenz einer Menge $B \in A\bar{K}$ mit den Schnittmaß-Funktionen (f_1, f_2) auch hinreichend ist.

Ferner ist eine Übertragung von [5.5] möglich:

Satz 7.2. Es seien die Voraussetzungen von [7.1] gegeben.

Erfüllt dann $(f_1, f_2) \in (\mathcal{M}(\mu_1), \mathcal{M}(\mu_2))$ für $x_i \in M_i$ und $x_i \in \bar{K}_i$,

$$0 \leq f_1(x_1) \leq \mu_2(A_{x_1}), \quad \int_{x_1} f_1 d\mu_1 \leq \int_{M_1} \min\{f_2(x_2), \mu_1(A_{x_1} X_1)\} d\mu_2,$$

$$0 \leq f_2(x_2) \leq \mu_1(A_{x_2}), \quad \int_{x_2} f_2 d\mu_2 \leq \int_{M_2} \min\{f_1(x_1), \mu_2(A_{x_2} X_2)\} d\mu_1,$$

so existiert eine Menge $B \in A\bar{K}$ mit

$$\mu_2(B_{x_1}) = f_1(x_1), \quad \mu_1(B_{x_2}) = f_2(x_2) \quad \text{für alle } x_i.$$

Beweis. Nach [7.1] existiert eine Menge $B^0 \in A\bar{K}$ derart, daß

$$\mu_2(B_{x_1}^0) = f_1(x_1) \quad \text{für } x_1 \in \bar{N}_1 \in \bar{K}_1 \text{ mit } \mu_1(N_1) = 0,$$

$$\mu_1(B_{x_1}^0) = f_1(x_1) \quad \text{für } x_1 \in \bar{N}_1 \in \bar{\mathcal{K}}_1 \text{ mit } \mu_1(N_1) = 0.$$

Ferner existieren nach [3.1] wegen der Atomlosigkeit von $\mu_i | \bar{\mathcal{K}}_i$ Mengen $B^i \in \bar{\mathcal{K}}$ derart, daß für alle x_i

$$\int_{\bar{N}_1} \chi_{B^1} \chi_A(x_1, x_2) d\mu_1 = f_1(x_1), \quad \int_{\bar{N}_1} \chi_{B^1} \chi_A(x_1, x_2) d\mu_1 = f_2(x_2).$$

Ähnlich wie im Beweis zu [5.5] ergeben sich dann für

$$B := B^0(\bar{N}_1, \bar{N}_2) + A[B^1(N_1, M_2) + B^2(M_1, N_2)] \in A\bar{\mathcal{K}}$$

genau die geforderten Schnittmaß-Funktionen. ┘

Sind dabei $\mu_i | \bar{\mathcal{K}}_i$ endliche Maße, so genügt es, wenn die angegebenen Integralbeziehungen – statt für $X_i \in \bar{\mathcal{K}}_i$ – lediglich gelten für die Mengen aus einem Mengenkörper $\mathcal{M}_i$ mit $\bar{\mathcal{K}}_i = {}^0\mathcal{M}_i$.

Denn ist $X_1^1, X_1^2, \dots$ eine aufsteigende (absteigende) Folge von Mengen aus $\mathcal{M}_1$, so liefert der Satz über die Integration bei monotoner Konvergenz die Richtigkeit der betreffenden Ungleichung auch für deren Vereinigung (Durchschnitt), da die auftretenden Integrale stets endlich sind.

Daraus folgt die Behauptung, da wegen (22) im Beweis von [5.4] zu $X_i \in \bar{\mathcal{K}}_i$ stets Mengen $X_i^{mn} \in \mathcal{M}_i$ existieren derart, daß

$$\prod_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_i^{mn} > X_i, \quad \mu_i \left(\prod_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_i^{mn} - X_i \right) = 0 \quad \text{und}$$

$$X_i^{m1} < X_i^{m2} < \dots, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_i^{1n} > \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_i^{2n} > \dots$$

$\mathcal{F}(A)$ besitzt vor allem zwei wesentliche Eigenschaften:

Satz 7.3. Unter den Voraussetzungen von [7.1] ist $\mathcal{F}(A)$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von $(\mathcal{M}(\mu_1), \mathcal{M}(\mu_2))$.

Beweis. 1. Nach [7.1] und nach [3.2] ist $(f_1, f_2) \in (\mathcal{M}(\mu_1), \mathcal{M}(\mu_2))$ genau dann in $\mathcal{F}(A)$ gelegen, wenn

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\bar{X}_1} f_1 d\mu_1 \leq \mu(A(X_1, X_2)) + \int_{\bar{X}_2} f_2 d\mu_2 \\ \int_{\bar{X}_1} f_1 d\mu_1 \leq \mu(A(X_1, X_2)) + \int_{\bar{X}_1} f_1 d\mu_1 \end{array} \right\} \quad \text{für } X_i \in \bar{\mathcal{K}}_i.$$

2. Gilt also $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(f_1^n, f_2^n), (f_1, f_2)\| = 0$ mit $(f_1^n, f_2^n) \in \mathcal{F}(A)$,

so erfüllen auch $f_i \in \mathcal{M}(\mu_i)$ die Ungleichungen (32), da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_i} f_i^n d\mu_i = \int_{X_i} f_i d\mu_i \quad \text{für } X_i \in \bar{K}_i;$$

also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_1^n, f_2^n) = (f_1, f_2) \in \mathcal{V}(A)$.

3. Ist nun $(f_1^1, f_2^1), (f_1^2, f_2^2) \in \mathcal{V}(A)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, so genügen auch $f_i := \lambda_1 f_i^1 + \lambda_2 f_i^2 \in \mathcal{M}(\mu_i)$ den Ungleichungen (32), da

$$\int_{X_i} f_i d\mu_i = \lambda_1 \int_{X_i} f_i^1 d\mu_i + \lambda_2 \int_{X_i} f_i^2 d\mu_i \quad \text{für } X_i \in \bar{K}_i;$$

also gilt $\lambda_1 (f_1^1, f_2^1) + \lambda_2 (f_1^2, f_2^2) = (f_1, f_2) \in \mathcal{V}(A)$. ┘

Daß $\mathcal{V}(A)$ bei atomlosen Maßen $\mu_i|_{\bar{K}_i}$ - mit Ausnahme des Falles $\mu(A) = 0$ - nie kompakt ist, läßt sich folgendermaßen einsehen:

Zu dem wegen $A \in \mathcal{Q}(\mu_1, \mu_2)$ atomlosen normalen Maß

$$\nu_1(X_1) := \mu(A(X_1, M_2)) = \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1}) d\mu_1 \quad \text{für } X_1 \in \bar{K}_1$$

existiert nach [2.4] eine $\bar{K}_1$ -meßbare Funktion $a_1|_{M_1}$ mit

$$\nu_1(\{a_1 \leq \alpha\}) = \alpha \quad \text{für } 0 \leq \alpha \leq \nu_1(M_1) = \mu(A).$$

Mit $X_1^n := \sum_{1 \leq \ell \leq 2^n} \frac{2\ell-1}{2^n} \gamma < a_1 \leq \frac{2\ell}{2^n} \gamma$, $\gamma := \min\{\nu_1(M_1), 1\}$ sei

$$B_n := A(X_1^n, M_2) \in A\bar{K} \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

Sind dann (f_1^n, f_2^n) die Schnittmaß-Funktionen zu B_n , so folgt durch einfache Überlegungen für $m \neq n$

$$\begin{aligned} \|(f_1^m, f_2^m), (f_1^n, f_2^n)\| &\geq \int_{M_1} |f_1^m - f_1^n| d\mu_1 = \int_{X_1^m + X_1^n} \mu_2(A_{x_1}) d\mu_1 \\ &= \nu_1(X_1^m + X_1^n) = \frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{2} \min\{\mu(A), 1\}. \end{aligned}$$

Ist also $\mu(A) > 0$, so kann die Folge (f_1^n, f_2^n) keinen Häufungspunkt in $(\mathcal{M}(\mu_1), \mathcal{M}(\mu_2))$ besitzen.

Ist dabei $\mu(A) < \infty$, läßt sich also $\mathcal{V}(A)$ im Raum $(\mathcal{L}(\mu_1), \mathcal{L}(\mu_2))$ mit seinem schwächeren Konvergenzbegriff betrachten, so gilt jedoch:

Satz 7.4. $(M, \bar{K}, \mu)$ sei der Produktraum zweier atomloser normaler Maßräume $(M_i, \bar{K}_i, \mu_i)$.

Ist dann $A \in \bar{K}$ eine Menge mit $\mu(A) < \infty$, so ist $\mathcal{V}(A)$ eine kompakte Teilmenge von $(\mathcal{L}(\mu_1), \mathcal{L}(\mu_2))$.

Beweis. Sei (f_1^n, f_2^n) , $n \in \mathbb{Z}$ eine vorgegebene Folge aus $\mathcal{V}(A)$.

Wegen $0 \leq f_1^n(x_1) \leq \mu_2(A_{x_1})$ μ_1 -fast, $0 \leq f_2^n(x_2) \leq \mu_1(A_{x_2})$ μ_2 -fast gilt

$$(33) \quad \|f_i^n\| \leq \mu(A) < \infty \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

Ist ferner $X_i^m \in \bar{K}_i$ eine absteigende Folge mit leerem Durchschnitt, so folgt unter Berücksichtigung von $\mu(A) < \infty$ für $m \rightarrow \infty$

$$\mu(A(X_1^m, M_2)) \rightarrow 0 \text{ bzw. } \mu(A(M_1, X_2^m)) \rightarrow 0, \text{ so daß wegen}$$

$$\left| \int_{X_1^m} f_1^n d\mu_1 \right| \leq \mu(A(X_1^m, M_2)) \text{ bzw. } \left| \int_{X_2^m} f_2^n d\mu_2 \right| \leq \mu(A(M_1, X_2^m)) \text{ für } n \in \mathbb{Z}$$

$$(34) \quad \begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{X_i^m} f_i^n d\mu_i = 0 \text{ gleichmäßig in } n, \\ \text{falls } X_i^m \in \bar{K}_i \text{ mit } X_i^q \supset X_i^1 \supset \dots \text{ und } \prod_{\mathbb{Z}} X_i^m = \emptyset. \end{cases}$$

Die gleichmäßige Beschränktheit (33) und die gleichmäßige σ -Additivität (34) bilden eine hinreichende Bedingung dafür, daß die Folge $((f_i^n))$ bzgl. schwacher Konvergenz einen Häufungspunkt $f_i \in \mathcal{L}(\mu_i)$ besitzt (siehe [2], Seite 292).

Für eine gewisse Teilfolge gilt daher $(f_1^{n_k}, f_2^{n_k}) \rightarrow (f_1, f_2)$, also auch

$$\int_{X_i} f_i^{n_k} d\mu_i \rightarrow \int_{X_i} f_i d\mu_i \quad \text{für } X_i \in \bar{K}_i;$$

daraus folgt zunächst $f_i \in \mathcal{M}(\mu_i)$, da

$$\int_{X_i} f_i d\mu_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X_i} f_i^{n_k} d\mu_i \geq 0 \quad \text{für } X_i \in \bar{K}_i.$$

Da nun ferner mit $(f_1^{n_k}, f_2^{n_k})$ auch (f_1, f_2) den Ungleichungen (32) im Beweis von [7.3] genügt, folgt wegen $A \in \mathcal{Q}(\mu_1, \mu_2)$ schließlich $(f_1, f_2) \in \mathcal{V}(A)$. ┘

Fast selbstverständlich ist die folgende Aussage:

Satz 7.5. Unter den Voraussetzungen von [7.1] besitzt $\mathcal{V}(A)$ den Symmetriepunkt $(\frac{1}{2}\mu_2(A_{x_1}), \frac{1}{2}\mu_1(A_{x_2}))$.

Beweis. Ist $B \in A\bar{K}$ und $C := A - B$, so folgt die Behauptung aus

$$\frac{1}{2}[(\mu_2(B_{x_1}), \mu_1(B_{x_2})) + (\mu_2(C_{x_1}), \mu_1(C_{x_2}))] = (\frac{1}{2}\mu_2(A_{x_1}), \frac{1}{2}\mu_1(A_{x_2})). \quad \text{┘}$$

Daher enthält $\mathcal{V}(A)$ bei atomlosen Maßen $\mu_i|_{\bar{K}_i}$ wegen der Konvexität das Paar $(\frac{1}{2}\mu_2(A_{x_1}), \frac{1}{2}\mu_1(A_{x_2}))$ - und damit ist das zu Beginn von §3 formulierte Halbierungsproblem gelöst.

Nun läßt sich auch zeigen, daß die für $(M_1, \bar{K}_1, \mu_1) = (R_1, \mathcal{L}_1, \lambda_1)$ bereits in §1 formulierte Bedingung

$$\mu(C(X_1, X_2)) \leq \frac{1}{2}\mu(A[(X_1, X_2) + (\bar{X}_1, \bar{X}_2)]) \quad \text{für } X_i \in \bar{K}_i.$$

für $\mu_i(A) < \infty$ in der Tat notwendig und hinreichend dafür ist, daß zu $C \in \mathcal{A} \bar{\mathcal{K}}$ eine Obermenge $B \in \mathcal{A} \bar{\mathcal{K}}$ existiert mit

$$\mu_2(B_{x_1}) = \frac{1}{2} \mu_2(A_{x_1}), \quad \mu_1(B_{x_2}) = \frac{1}{2} \mu_1(A_{x_2}).$$

Denn das Bestehen dieser Ungleichung ist nach [6.1] gleichwertig mit $C \in \mathcal{O}(\frac{1}{2}\chi_A, \chi_A)$, also mit der Existenz einer $\bar{\mathcal{K}}$ -meßbaren Funktion $h|_M$, für die neben $0 \leq h \leq \chi_{A-C}$

$$\mu_2(C_{x_1}) + \int_{M_2} h(x_1, x_2) d\mu_2 = \frac{1}{2} \mu_2(A_{x_1}),$$

$$\mu_1(C_{x_2}) + \int_{M_1} h(x_1, x_2) d\mu_1 = \frac{1}{2} \mu_1(A_{x_2});$$

Anwendung von [6.6] auf die Funktionen $f := h$ und $g := \chi_{A-C}$ ergibt dann die Menge $B = C$.

Im übrigen ist bei der "schnittmaß-gleichen Halbierung" einer Menge die Voraussetzung $A \in \mathcal{O}(\mu_1, \mu_2)$ unnötig sowie exakte Übereinstimmung erreichbar; denn es gilt allgemeiner:

Satz 7.6. $(M, \bar{\mathcal{K}}, \mu)$ sei der Produktraum zweier atomloser normaler Maßräume $(M_i, \bar{\mathcal{K}}_i, \mu_i)$.

Dann existiert zu $A \in \bar{\mathcal{K}}$ und $n \in \mathbb{Z}$ stets eine Zerlegung

$A = A^1 + \dots + A^n$ in $\bar{\mathcal{K}}$ mit

$$\mu_2(A_{x_1}^1) = \dots = \mu_2(A_{x_1}^n), \quad \mu_1(A_{x_2}^1) = \dots = \mu_1(A_{x_2}^n) \quad \text{für alle } x_i.$$

Beweis. Da die Maße $\mu_i|_{\bar{\mathcal{K}}_i}$ normal sind, und sich die Schnittmaß-Funktionen σ -additiv verhalten, bedeutet es keine Beschränkung der Allgemeinheit, $\mu_2(A_{x_1}), \mu_1(A_{x_2}) < \infty$ anzunehmen.

Es wird nun vollständige Induktion nach n durchgeführt.

Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen; die Behauptung sei also für festes $n \geq 1$ bereits bewiesen.

Da $(0, 0)$ und $(\mu_2(A_{x_1}), \mu_1(A_{x_2}))$ in $\mathcal{S}(A)$ liegen, existiert dann nach [7.1] - [7.3] eine Menge $A^{n+1} \in \mathcal{A} \bar{\mathcal{K}}$ mit

$$\mu_2(A_{x_1}^{n+1}) = \frac{1}{n+1} \mu_2(A_{x_1}), \quad \mu_1(A_{x_2}^{n+1}) = \frac{1}{n+1} \mu_1(A_{x_2}) \quad \text{für alle } x_i.$$

Nach Induktionsannahme existiert ferner eine Zerlegung

$A - A^{n+1} = A^1 + \dots + A^n$ in $\bar{\mathcal{K}}$ mit

$$\mu_2(A_{x_1}^1) = \dots = \mu_2(A_{x_1}^n), \quad \mu_1(A_{x_2}^1) = \dots = \mu_1(A_{x_2}^n) \quad \text{für alle } x_i.$$

Die Mengen $A^1, \dots, A^{n-1}$ besitzen die geforderte Eigenschaft. ┘

Es ist klar, daß Schnittmaß-Funktionen $(f_1, f_2) \in \mathcal{J}(A)$ eine Menge $B \in \mathcal{A} \bar{\mathcal{K}}$ höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge festlegen.

Bereits [7.6] zeigt nun, daß B auch nicht notwendig μ -fast eindeutig bestimmt ist; das Ausmaß der Mehrdeutigkeit geht jedoch besonders deutlich hervor aus folgendem Beispiel:

Sei $(M_i, \mathcal{K}_i, \mu_i)$ für $i = 1, 2$ der Maßraum $(I, \mathcal{I}_i, \lambda_i)$ mit $I := [0, 1]$.

$$X \rightarrow A(X) := \{(x_1, x_2) \in (I, I) : x_1 + x_2 = 1 \text{ oder } x_1 + x_2 \in X\}$$

definiert dann eine eindeutige Abbildung von $\mathcal{I}_1$ auf einen atomlosen σ -Körper $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2$, da insbesondere

$$A(\emptyset) = \emptyset \quad \text{und} \quad A(I - X) = (I, I) - A(X).$$

Hier ist $\lambda_i(A(X)_{x_i}) = \lambda_i(X)$ für $x_i \in I$ ($i = 1, 2$).

Denn X läßt sich beliebig genau durch offene Mengen überdecken, so daß wegen der Operationstreue der Abbildung $X \rightarrow A(X)$ die Richtigkeit dieser Gleichung für Intervalle X genügt; in diesem Fall läßt sie sich aber leicht nachprüfen.

Sämtliche Mengen aus $\mathcal{J}$ besitzen also konstantes Schnittmaß.

Die Frage, unter welchen Bedingungen eine Menge durch ihre Schnittmaß-Funktionen innerhalb einer festen Menge μ -fast eindeutig bestimmt ist, läßt sich folgendermaßen beantworten:

Satz 7.7. Es seien die Voraussetzungen von [7.1] gegeben.

Ist dann (f_1, f_2) Extrempunkt von $\mathcal{J}(A)$, so ist die Menge $B \in \mathcal{A} \bar{\mathcal{K}}$ mit $(\mu_1(B_{x_1}), \mu_2(B_{x_2})) = (f_1, f_2)$ μ -fast eindeutig bestimmt.

Ist dagegen (f_1, f_2) nicht Extrempunkt, so existiert eine kontinuierliche Schar $B(\mathcal{J})$, $0 \leq \mathcal{J} \leq 1$, mit

$$\mu(B(\mathcal{J}_1) + B(\mathcal{J}_2)) > 0 \quad \text{für } \mathcal{J}_1 \neq \mathcal{J}_2 \text{ derart, daß}$$

$$(\mu_1(B(\mathcal{J})_{x_1}), \mu_2(B(\mathcal{J})_{x_2})) = (f_1, f_2) \quad \text{für } 0 \leq \mathcal{J} \leq 1.$$

Beweis. 1. Sei (f_1, f_2) Extrempunkt von $\mathcal{J}(A)$ und mit $B^1, B^2 \in \mathcal{A} \bar{\mathcal{K}}$

$$(\mu_1(B_{x_1}^1), \mu_2(B_{x_2}^1)) = (f_1, f_2) = (\mu_1(B_{x_1}^2), \mu_2(B_{x_2}^2)).$$

Wegen $\chi_{B^1} + \chi_{B^2} = \chi_{B^1+B^2} + \chi_{B^1+B^2}$ gilt dann

$$\begin{aligned}(f_1, f_2) &= \frac{1}{2} \sum_{\ell=1,2} (\mu_\ell(B_{x_1}^\ell), \mu_\ell(B_{x_2}^\ell)) \\ &= \frac{1}{2} [(\mu_1((B^1 B^2)_{x_1}), \mu_1((B^1 B^2)_{x_2})) + (\mu_2((B^1+B^2)_{x_1}), \mu_2((B^1+B^2)_{x_2}))],\end{aligned}$$

so daß nach Voraussetzung

$$(\mu_2((B^1 B^2)_{x_1}), \mu_1((B^1 B^2)_{x_2})) = (\mu_2((B^1+B^2)_{x_1}), \mu_1((B^1+B^2)_{x_2})).$$

Daher gilt wegen $A \in \mathcal{Q}(\mu_1, \mu_2)$ insbesondere

$$\mu(B^1 + B^2) = \int_{M_1} [\mu_2((B^1+B^2)_{x_1}) - \mu_2((B^1 B^2)_{x_1})] d\mu_1 = 0.$$

$$2. \text{ Sei nun } (f_1, f_2) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1,2} (\mu_\ell(B_{x_1}^\ell), \mu_\ell(B_{x_2}^\ell))$$

mit $B^1, B^2 \in A\overline{\mathbb{K}}$ und $(\mu_2(B_{x_1}^1), \mu_1(B_{x_2}^1)) \neq (\mu_2(B_{x_1}^2), \mu_1(B_{x_2}^2))$.

Für $C^1 := B^1 \overline{B^2}$ und $C^2 := B^2 \overline{B^1}$ gilt dann jedenfalls

$$\mu(C^1 + C^2) = \mu(B^1 + B^2) > 0.$$

Durch schrittweise wiederholte Anwendung von [7.6] lassen sich nun zu jeder Dualzahl $\vartheta = \frac{m}{2^n} \in [0, 1]$ Mengen $C^\ell(\vartheta) \in C^\ell \overline{\mathbb{K}}$ ($\ell = 1, 2$) konstruieren mit den Eigenschaften

$$(35) \begin{cases} (\mu_2(C^\ell(\vartheta)_{x_1}), \mu_1(C^\ell(\vartheta)_{x_2})) = \vartheta (\mu_2(C_{x_1}^\ell), \mu_1(C_{x_2}^\ell)) \\ C^\ell(\vartheta_1) \subset C^\ell(\vartheta_2) \quad \text{für } \vartheta_1 < \vartheta_2. \end{cases}$$

Durch $C(\vartheta) := \sum_{m \leq 2^n, \vartheta} C(\frac{m}{2^n})$ läßt sich die Definition von $C(\vartheta)$ ausdehnen auf alle $\vartheta \in [0, 1]$, ohne die Relationen (35) zu verletzen.

Sei nun $B(\vartheta) := B^1 B^2 + \sum_{\ell=1,2} (C^\ell(\frac{\vartheta+1}{2}) - C^\ell(\frac{\vartheta}{2})) \in A\overline{\mathbb{K}}$ für $0 \leq \vartheta \leq 1$.

Dann folgt aus (35) wegen $C^1 C^2 = 0$

$$\begin{aligned}\mu_2(B(\vartheta)_{x_1}) &= \mu_2((B^1 B^2)_{x_1}) + \sum_{\ell=1,2} (\frac{\vartheta+1}{2} - \frac{\vartheta}{2}) \mu_2(C_{x_1}^\ell) \\ &= \frac{1}{2} [\mu_2((B^1 B^2 + C^1)_{x_1}) + \mu_2((B^1 B^2 + C^2)_{x_1})] \\ &= \frac{1}{2} (\mu_2(B_{x_1}^1) + \mu_2(B_{x_1}^2)) = f_1(x_1),\end{aligned}$$

und eine entsprechende Gleichung besteht für $f_2|_{M_2}$.

Ferner folgt aus (35) durch Integration $\mu(C^\ell(\vartheta)) = \vartheta \mu(C^\ell)$ und daraus für $\vartheta_1 < \vartheta_2$ durch einfache Rechnung

$$\mu(B(\vartheta_1) + B(\vartheta_2)) = (\vartheta_2 - \vartheta_1) \mu(C^1 + C^2) > 0. \quad \square$$

Extremalpunkte von $\mathcal{F}(A)$ ergeben sich auf Grund dieses Satzes bei-

spielsweise für die Mengen $B = A(X_1, X_2)$ mit $X_i \in \bar{K}_i$.

Denn $\mu_2(B'_{x_1}) \stackrel{\mu_1}{=} \mu_2(B_{x_1})$, $\mu_1(B'_{x_2}) \stackrel{\mu_2}{=} \mu_1(B_{x_2})$ mit $B' \in A\bar{K}$ liefert

$$\mu_2(B'_{x_1}) = 0 \quad \text{für } \mu_1\text{-fast alle } x_1 \in \bar{X}_1,$$

$$\mu_1(B'_{x_2}) = 0 \quad \text{für } \mu_2\text{-fast alle } x_2 \in \bar{X}_2,$$

d.h. $B' \in A(X_1, X_2) + N$ mit $\mu(N) = 0$;

also ist $\mu(B' \bar{B}) = 0$ und daher wegen $A \in \mathcal{G}(\mu_1, \mu_2)$

$$\mu(B + B') = \int_{M_1} |\mu_2(B_{x_1}) - \mu_2(B'_{x_1})| d\mu_1 = 0.$$

Von Interesse ist nun noch folgender Satz, der in einem gewissen Zusammenhang mit [3.1] steht:

Satz 7.8. $(M, \bar{K}, \mu)$ sei der Produktraum zweier atomloser normaler Maßräume $(M_i, \bar{K}_i, \mu_i)$; dabei sei das Maß $\mu_2|_{\bar{K}_2}$ endlich.

Ist dann $f_1 \in \mathcal{M}(\mu_1)$ mit $0 \leq f_1(x_1) \leq \mu_2(M_2)$ für $x_1 \in M_1$,

so existiert eine Menge $A \in \bar{K}$ mit

$$\mu_2(A_{x_1}) = f_1(x_1) \text{ und } \mu_1(A_{x_2}) = \text{const.} \quad \text{für alle } x_i.$$

Beweis. 1. Zunächst wird $\mu_1(M_1) < \infty$ angenommen.

Für $\mu_2(M_2) > 0$ (andernfalls ist nichts zu beweisen) sei dann

$$f_2(x_2) := \frac{1}{\mu_2(M_2)} \int_{M_1} f_1 d\mu_1;$$

$f_2|_{M_2}$ ist also eine konstante Funktion aus $\mathcal{M}(\mu_2)$.

Dabei gilt wegen $\frac{1}{\mu_2(M_2)} \int_{M_1} f_1 d\mu_1 \leq \min\{f_2, \mu_1(X_1)\}$

$$\int_{X_1} f_1 d\mu_1 \leq \int_{M_2} \min\{f_2, \mu_1(X_1)\} d\mu_2 \quad \text{für } X_1 \in \bar{K}_1;$$

ferner folgt aus $\frac{1}{\mu_2(M_2)} f_1 \mu_2(X_2) \leq \min\{f_1, \mu_2(X_2)\}$

$$\int_{X_2} f_2 d\mu_2 \leq \int_{M_1} \min\{f_1, \mu_2(X_2)\} d\mu_1 \quad \text{für } X_2 \in \bar{K}_2.$$

Da außerdem auch $0 \leq f_2 \leq \mu_1(M_1)$, erfüllt also (f_1, f_2) für

$A := M \in \mathcal{G}(\mu_1, \mu_2)$ alle Voraussetzungen von [7.2].

Die Anwendung dieses Satzes ergibt die Behauptung.

2. Im allgemeinen Fall existieren nach Voraussetzung eine normale Zerlegung $M_1 = \sum_2^n M_1^n$ zu $\mu_1|_{\bar{K}_1}$ und wegen des bewiesenen

Falles für $f_1|_{M_1^n}$ geeignete Mengen $A_n \in (M_1^n, M_2)\bar{K}$.

Dann läßt sich $A := \sum_n A_n \in \bar{K}$ wählen. ┘

Die Voraussetzung $\mu_2(M_2) < \infty$ ist bei diesem Satz wesentlich.

Zum Abschluß wird im folgenden die naheliegende Verallgemeinerung des Beispiels behandelt, das in §1 zum Halbierungsproblem führte.

Ohne nochmals näher darauf einzugehen, sei nur daran erinnert, daß dort im Grunde die Konvexität des Wertebereichs zu jenen Maßen untersucht wurde, die durch die Funktionen $\chi_{[0,t]}(x_1)$, $\chi_{[0,t]}(x_2)$ für rationales $t \in I = [0,1]$ auf $I\mathcal{L}_1 \times I\mathcal{L}_1$ bzgl. λ_2 erklärt werden. Sei also für zwei Maßräume $(M_i, \bar{K}_i, \mu_i)$ mit dem Produktraum $(M, \bar{K}, \mu)$

$$\mathcal{F} := \{ \chi_{(x_1, M_2)} : x_1 \in \bar{K}_1 \} + \{ \chi_{(M_1, x_2)} : x_2 \in \bar{K}_2 \}.$$

Damit die durch $\nu(A) := \int_A f d\mu$ auf $\bar{K}$ definierten Maße für $f \in \mathcal{F}$ endlich sind, ist dabei $\mu_i(M_i) < \infty$ vorauszusetzen.

Da jede Funktion $f_i \in \mathcal{L}(\mu_i)$ Grenzwert einer Folge endlicher Treppenfunktionen ist, ist dann

$$\mathcal{L}(\mu_1, \mu_2) := \{ f_1(x_1) + f_2(x_2) : f_i \in \mathcal{L}(\mu_i) \} \subset \mathcal{T}(\mathcal{F}),$$

wobei $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ der von $\mathcal{F}$ erzeugte (bzgl. der Norm in $\mathcal{L}(\mu)$) abgeschlossene lineare Teilraum ist.

Dabei gilt Gleichheit auf Grund des folgenden Satzes:

Satz 7.9. $(M, \bar{K}, \mu)$ sei der Produktraum zweier endlicher Maßräume $(M_i, \bar{K}_i, \mu_i)$.

Dann ist $\mathcal{L}(\mu_1, \mu_2)$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathcal{L}(\mu)$.

Beweis. 1. Ist $f_i \in \mathcal{L}(\mu_i)$, so ist $f_1(x_1) + f_2(x_2) \in \mathcal{L}(\mu)$, da

$$\int_M |f_1(x_1) + f_2(x_2)| d\mu \leq \mu_2(M_2) \int_{M_1} |f_1| d\mu_1 + \mu_1(M_1) \int_{M_2} |f_2| d\mu_2 < \infty;$$

wegen der Linearität von $\mathcal{L}(\mu_i)$ ist $\mathcal{L}(\mu_1, \mu_2)$ also ein linearer Teilraum von $\mathcal{L}(\mu)$.

2. Mit $f_1^n(x_1) + f_2^n(x_2) \in \mathcal{L}(\mu_1, \mu_2)$ und $f \in \mathcal{L}(\mu)$ gelte nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\| = 0 \quad \text{für } g_n(x_1, x_2) := f_1^n(x_1) + f_2^n(x_2) - f(x_1, x_2);$$

dabei läßt sich durch Abänderung auf einer Nullmenge erreichen

$$(36) \quad f(x_1, x_2^0) \in \mathcal{L}(\mu_1) \quad \text{für } x_2^0 \in M_2, \quad f(x_1^0, x_2) \in \mathcal{L}(\mu_2) \quad \text{für } x_1^0 \in M_1.$$

Die Folge $((g_n))$ konvergiert auch nach Maß gegen 0, da für $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{|g_n| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \|g_n\| \rightarrow 0;$$

daher konvergiert eine Teilfolge $((g_{n_k}))$ μ -fast gegen 0, so daß

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(x_1, x_2) = 0 \quad \text{für } (x_1, x_2) \in \bar{N} \in \bar{\mathcal{K}} \text{ mit } \mu(N) = 0.$$

Für $N_1 := \{x_1 \in M_1 : \mu_1(N_{x_1}) > 0\} \in \bar{\mathcal{K}}_1$, $N_2 := \{x_2 \in M_2 : \mu_2(N_{x_2}) > 0\} \in \bar{\mathcal{K}}_2$ gilt also $\mu_1(N_1) = 0 = \mu_2(N_2)$.

Ist daher $\bar{N}(\bar{N}_1, \bar{N}_2) = 0$, so ist $\mu(M) = 0$, d.h. $f \equiv 0 \in \mathcal{L}(\mu_1, \mu_2)$.

Wird dagegen $(x_1^0, x_2^0) \in \bar{N}(\bar{N}_1, \bar{N}_2)$ fest gewählt, so gilt

$$+ \lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(x_1, x_2) = 0 \quad \text{für } (x_1, x_2) \in \bar{N}$$

$$- \lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(x_1, x_2^0) = 0 \quad \text{für } x_1 \in \bar{N}_{x_2^0} \text{ mit } \mu_1(N_{x_2^0}) = 0$$

$$- \lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(x_1^0, x_2) = 0 \quad \text{für } x_2 \in \bar{N}_{x_1^0} \text{ mit } \mu_2(N_{x_1^0}) = 0$$

$$+ \lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(x_1^0, x_2^0) = 0 \quad \text{wegen } (x_1^0, x_2^0) \in \bar{N}.$$

Addition dieser vier Gleichungen liefert durch Einsetzen von g_{n_k}

$$-f(x_1, x_2) + f(x_1, x_2^0) + f(x_1^0, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) = 0 \quad \text{für } (x_1, x_2) \in \bar{N}(\bar{N}_{x_2^0}, \bar{N}_{x_1^0}),$$

d.h. $f(x_1, x_2) \equiv f(x_1, x_2^0) + f(x_1^0, x_2) - f(x_1^0, x_2^0)$.

Wegen (36) und wegen $|f(x_1^0, x_2^0)| < \infty$ ist also $f \in \mathcal{L}(\mu_1, \mu_2)$, und das beweist die Abgeschlossenheit des linearen Teilraums. $\square$

Der Satz von Liapounoff läßt sich nun auf den Wertebereich der durch $f \in \mathcal{L}(\mu_1, \mu_2)$ definierten Maße übertragen:

Satz 7.10. $(M, \bar{\mathcal{K}}, \mu)$ sei der Produktraum zweier atomloser endlicher Maßräume $(M_i, \bar{\mathcal{K}}_i, \mu_i)$.

Dann ist $\{\int_A f d\mu : A \in \bar{\mathcal{K}}\}$ eine konvexe und kompakte Menge von Funktionen auf $\mathcal{L}(\mu_1, \mu_2)$.

Beweis. 1. Sei $L_\mu(f) := \int_A f d\mu$ für $f \in \mathcal{L}(\mu_1, \mu_2)$ mit $A^1, A^2 \in \bar{\mathcal{K}}$.

Da $\mu_i|_{\bar{\mathcal{K}}_i}$ atomlos und endlich ist, existiert nach [7.3] zu $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \geq 0$ mit $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = 1$ eine Menge $A \in \bar{\mathcal{K}}$ derart, daß

$$(\mu_1(A_{x_1}), \mu_2(A_{x_2})) = \sum_{i=1,2} \mathcal{J}_i(\mu_1(A_{x_1}^i), \mu_2(A_{x_2}^i)).$$

Damit gilt für jede Funktion $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2) \in \mathcal{L}(\mu_1, \mu_2)$

$$\begin{aligned}
L(f) &:= \int_A f \, d\mu = \int_{M_1} \mu_2(A_{x_1}) f_1(x_1) \, d\mu_1 + \int_{M_2} \mu_1(A_{x_2}) f_2(x_2) \, d\mu_2 \\
&= \sum_{\ell=1,2} \vartheta_\ell \left[\int_{M_1} \mu_2(A_{x_1}^\ell) f_1(x_1) \, d\mu_1 + \int_{M_2} \mu_1(A_{x_2}^\ell) f_2(x_2) \, d\mu_2 \right] \\
&= \sum_{\ell=1,2} \vartheta_\ell \int_{A^\ell} f \, d\mu = \vartheta_1 L_1(f) + \vartheta_2 L_2(f).
\end{aligned}$$

2. Sei nun $L_n(f) := \int_{A^n} f \, d\mu$, $n \in \mathbb{Z}$ mit $A^n \in \bar{\mathcal{E}}$ eine vorgegebene

Folge von Funktionen auf $\mathcal{L}(\mu_1, \mu_2)$.

Wegen $\mu(M) < \infty$ ist $\mathcal{Y}(M)$ nach [7.4] eine kompakte Teilmenge von $(\mathcal{L}(\mu_1), \mathcal{L}(\mu_2))$, so daß für eine geeignete Teilfolge

$$(\mu_2(A_{x_1}^{n_k}), \mu_1(A_{x_2}^{n_k})) \rightarrow (\mu_2(A_{x_1}), \mu_1(A_{x_2})) \text{ mit } A \in \bar{\mathcal{E}}.$$

Das bedeutet nach Definition der schwachen Konvergenz

$$\begin{aligned}
\int_{M_1} \mu_2(A_{x_1}^{n_k}) f_1(x_1) \, d\mu_1 &\rightarrow \int_{M_1} \mu_2(A_{x_1}) f_1(x_1) \, d\mu_1, \\
\int_{M_2} \mu_1(A_{x_2}^{n_k}) f_2(x_2) \, d\mu_2 &\rightarrow \int_{M_2} \mu_1(A_{x_2}) f_2(x_2) \, d\mu_2,
\end{aligned}$$

falls $f_\ell|_{M_\ell} \in \bar{\mathcal{E}}_\ell$ -meßbare μ_ℓ -fast beschränkte Funktionen sind.

Diese Grenzbeziehungen gelten dann auch für beliebige Funktionen $f_\ell \in \mathcal{L}(\mu_\ell)$; denn mit $X_1^m := \{ |f_1| > m \} \in \bar{\mathcal{E}}_1$ gilt beispielsweise

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{M_1} [\mu_2(A_{x_1}^{n_k}) - \mu_2(A_{x_1})] f_1(x_1) \, d\mu_1 \right| \\
&\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{M_1} [\dots] \chi_{\bar{X}^m} f_1(x_1) \, d\mu_1 \right| + \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{X_1^m} [\dots] f_1(x_1) \, d\mu_1 \right| \\
&\leq 0 + \mu_2(M_2) \int_{X_1^m} |f_1| \, d\mu_1,
\end{aligned}$$

der zweite Summand wird dabei wegen $\mu_1(\cap_z X_1^m) = 0$ für $m \rightarrow \infty$ beliebig klein, und das zeigt die behauptete Konvergenz.

Damit gilt für jede Funktion $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2) \in \mathcal{L}(\mu_1, \mu_2)$

$$\begin{aligned}
L(f) &:= \int_A f \, d\mu = \int_{M_1} \mu_2(A_{x_1}) f_1(x_1) \, d\mu_1 + \int_{M_2} \mu_1(A_{x_2}) f_2(x_2) \, d\mu_2 \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_{M_1} \mu_2(A_{x_1}^{n_k}) f_1(x_1) \, d\mu_1 + \int_{M_2} \mu_1(A_{x_2}^{n_k}) f_2(x_2) \, d\mu_2 \right] \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A^{n_k}} f \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} L_{n_k}(f).
\end{aligned}$$

§8. N-fache Produkträume

Beim Versuch, die Ergebnisse von §7 auf einen Produktraum $(M, \bar{\kappa}, \mu)$ von n Maßräumen $(M_i, \bar{\kappa}_i, \mu_i)$ zu übertragen, ergeben sich vollkommen neue Gesichtspunkte.

Denn nun besitzt eine Menge insgesamt $2^n - 2$ Schnittmaß-Funktionen, die zu den m -tupeln $(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ mit $i_1 < \dots < i_m$ und $0 < m < n$ gehören.

Im folgenden werden daher lediglich die zwei nächstliegenden Fälle behandelt; dabei sei $(\tilde{M}_i, \tilde{\kappa}_i, \tilde{\mu}_i)$ für $i = 1, \dots, n$ stets der Produktraum der $(n-1)$ Maßräume $M_k, \bar{\kappa}_k, \mu_k$ mit $k \neq i$.

Eine erste Verallgemeinerung des Falles $n = 2$ führt auf die Gesamtheit •

$$\{(\tilde{\mu}_1(B_{x_1}), \dots, \tilde{\mu}_n(B_{x_n})) : B \in A\bar{\kappa}\} \quad \text{mit } A \in \bar{\kappa}.$$

Wird dabei $\mu(A) < \infty$ vorausgesetzt, so ist - ausgehend von [3.2] - zu vermuten, daß bei atomlosen Maßen $\mu_i, \bar{\kappa}_i$ die Bedingungen

$$\int_{M_1} f_1 d\mu_1 = \dots = \int_{M_n} f_n d\mu_n =: \gamma \quad \text{und}$$

$$\gamma \leq \mu(A(X_1, \dots, X_n)) + \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\bar{X}_i} f_i d\mu_i \quad \text{für } X_i \in \bar{\kappa}_i$$

notwendig und hinreichend sind für die Existenz von $B \in A\bar{\kappa}$ mit

$$\tilde{\mu}_i(B_{x_i}) = f_i(x_i) \in \mathcal{Z}(\mu_i) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Die Notwendigkeit ergibt sich in der Tat sofort aus

$$\int_{M_i} \tilde{\mu}_i(B_{x_i}) d\mu_i = \mu(B) \quad \text{und}$$

$$\mu(B) \leq \mu(B(X_1, \dots, X_n)) + \sum_{1 \leq i \leq n} \mu(B(M_1, \dots, M_{i-1}, \bar{X}_i, M_{i+1}, \dots, M_n));$$

doch führt eine Verallgemeinerung des für $n = 2$ geführten Beweises der Umkehrung an den Stellen [4.1] und [6.5] zu Schwierigkeiten. Dagegen läßt sich die in [7.3] bewiesene Aussage über die Konvergenz sehr leicht auf die oben definierte Gesamtheit übertragen:

Satz 8.1. $(M, \bar{\kappa}, \mu)$ sei der Produktraum der atomlosen normalen Maßräume $(M_i, \bar{\kappa}_i, \mu_i)$ ($i = 1, \dots, n$).

Ist dann $A \in \bar{K}$ eine Menge mit $\tilde{\mu}_i(A_{x_i}) < \infty$ μ_i -fast für $i = 1, \dots, n$, so ist $\{(\tilde{\mu}_1(B_{x_1}), \dots, \tilde{\mu}_n(B_{x_n})) : B \in A\bar{K}\}$ eine konvexe Teilmenge von $(M(\mu_1), \dots, M(\mu_n))$.

Beweis. 1. Mit $(M_i, \bar{K}_i, \mu_i)$, $i > 1$ ist auch $(\tilde{M}_1, \tilde{K}_1, \tilde{\mu}_1)$ ein atomloser normaler Maßraum, wobei $A \in \bar{K} = \bar{K}_1 \times \dots \times \bar{K}_n = \tilde{K}_1 \times \tilde{K}_1$.

Daher ist $\tilde{N} := \{\tilde{x}_1 \in \tilde{M}_1 : \mu_1(A_{\tilde{x}_1}) = \infty\} \in \tilde{K}_1$.

Wegen $\tilde{\mu}_n(A_{x_n}) = \int_{(M_1, \dots, M_{n-1})} \mu_1(A_{\tilde{x}_1}) d(\mu_1 \times \dots \times \mu_{n-1})$ (für $n > 2$)

ist also $\tilde{\mu}_n(A_{x_n}) = \infty$, falls $(\mu_1 \times \dots \times \mu_{n-1})(\tilde{N}_{x_n}) > 0$,

so daß mit $\tilde{\mu}_n(A_{x_n}) < \infty$ auch $(\mu_1 \times \dots \times \mu_{n-1})(\tilde{N}_{x_n}) = 0$ μ_n -fast.

Daher ist $\tilde{\mu}_1(\tilde{N}) = \int_{M_1} (\mu_1 \times \dots \times \mu_{n-1})(\tilde{N}_{x_1}) d\mu_n = 0$, d.h.

$\mu_1(A_{\tilde{x}_1}) < \infty$ $\tilde{\mu}_1$ -fast und

$\tilde{\mu}_1(A_{\tilde{x}_1}) < \infty$ μ_1 -fast nach Voraussetzung.

2. Da also $A \in \mathcal{H}(\mu_1, \tilde{\mu}_1)$, ist nach [7.3]

$\{(\tilde{\mu}_1(B_{x_1}), \mu_1(B_{\tilde{x}_1})) : B \in A\bar{K}\}$ konvex.

Daher existiert zu $B^1, B^2 \in A\bar{K}$ und $\vartheta_1, \vartheta_2 \geq 0$ mit $\vartheta_1 + \vartheta_2 = 1$ nach [7.1] und nach [7.2] eine Menge $B \in A\bar{K}$ derart, daß

$$(37) \begin{cases} \tilde{\mu}_1(B_{x_1}) = \sum_{i=1,2} \vartheta_i \tilde{\mu}_1(B_{x_1}^i) & \text{für } x_1 \in M_1, \\ \mu_1(B_{\tilde{x}_1}) = \sum_{i=1,2} \vartheta_i \mu_1(B_{\tilde{x}_1}^i) & \text{für } \tilde{x}_1 \in \tilde{M}_1. \end{cases}$$

Integration der zweiten Gleichung über $(M_2, \dots, M_{i-1}, M_{i+1}, \dots, M_n)$

mit dem Maß $\mu_2 \times \dots \times \mu_{i-1} \times \mu_{i+1} \times \dots \times \mu_n$ führt zu

$$\tilde{\mu}_i(B_{x_i}) = \sum_{i=1,2} \vartheta_i \tilde{\mu}_i(B_{x_i}^i) \quad \text{für } x_i \in M_i \quad (i > 1).$$

Das bedeutet zusammen mit der ersten Gleichung in (37) die Konvexität von $\{(\tilde{\mu}_1(B_{x_1}), \dots, \tilde{\mu}_n(B_{x_n})) : B \in A\bar{K}\}$. ┘

Wie in §7 folgt daraus für $A \in \bar{K}$ und $m \in \mathbb{Z}$ insbesondere die Existenz einer Zerlegung $A = A^1 + \dots + A^m$ in $\bar{K}$ mit

$$\tilde{\mu}_i(A_{x_i}^1) = \dots = \tilde{\mu}_i(A_{x_i}^m) \quad \text{für } x_i \in M_i \text{ und } i = 1, \dots, n.$$

Eine zweite Verallgemeinerung des Falles $n = 2$ führt auf die Gesamtheit

$$\{(\mu_1(B_{\tilde{x}_1}), \dots, \mu_n(B_{\tilde{x}_n})) : B \in A\bar{K}\} \quad \text{mit } A \in \bar{K}.$$

Hier lassen sich neben der durch Integration folgenden Verträglichkeitsbedingung

$$\int_{M_k} f_k d\mu_k = \int_{M_k} f_k d\mu_i \quad \text{für } k \neq i \quad (n > 2),$$

in der $\tilde{\mu}_{kl}$ das Produktmaß der Maße μ_i mit $i \neq k, l$ bezeichnet, nur schwer einfache Bedingungen finden für die Existenz von $B \in \mathcal{A}_k$ mit

$$\mu_i(B_{\tilde{\mu}_{kl}}) = f_i(\tilde{x}_i) \in \mathcal{M}(\tilde{\mu}_i) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Selbst eine Verschärfung der oben angeführten Zerlegbarkeit einer Menge in m bzgl. $(n-1)$ -dimensionaler Schnitte maßgleiche Teile auf 1-dimensionale Schnitte ist nicht ohne weiteres möglich. Für Mengen eines früher bereits aufgetretenen Typs ist sie jedoch sofort durchführbar:

Satz 8.2. $(M, \bar{K}, \mu)$ sei der Produktraum der atomlosen normalen Maßräume $(M_i, \bar{K}_i, \mu_i)$ ($i = 1, \dots, n$).

Dann existiert zu $A = \sum (X_1^i, \dots, X_n^i)$ mit $X_i^i \in \bar{K}_i$ und zu $m \in \mathbb{Z}$ stets eine Zerlegung $A = A^1 + \dots + A^m$ in $\bar{K}$ mit

$$\mu_i(A_{\tilde{\mu}_i}^1) = \dots = \mu_i(A_{\tilde{\mu}_i}^m) \quad \text{für } \tilde{x}_i \in \bar{M}_i \text{ und } i = 1, \dots, n.$$

Beweis. Es genügt, die Existenz derartiger Zerlegungen für jedes Rechteck $R = (X_1, \dots, X_n)$ nachzuweisen, wobei sich wegen der Normalität von $\mu_i | \bar{K}_i$ außerdem $\mu_i(X_i) < \infty$ annehmen läßt.

Wegen der Atomlosigkeit von $\mu_i | \bar{K}_i$ existieren dann nach [2.2] Zerlegungen $X_i = X_i^1 + \dots + X_i^m$ in $\bar{K}_i$ mit $\mu_i(X_i^1) = \dots = \mu_i(X_i^m) =: \alpha_i$.

$$A^i := \sum_{k=1}^m (X_1^{k,i}, \dots, X_n^{k,i}) \quad \text{mit}$$

$$K_\ell := \{(k_1, \dots, k_n) : 1 \leq k_i \leq m, \sum_{i=1}^n k_i \equiv 1 \pmod{m}\} \quad \text{für } \ell = 1, \dots, m$$

definiert dann eine geeignete Zerlegung von R :

$$R = \sum_{1 \leq \ell \leq m} A^\ell \quad \text{folgt sofort aus} \quad \sum_{1 \leq \ell \leq m} K_\ell = \{(k_1, \dots, k_n) : 1 \leq k_i \leq m\}.$$

Ferner gilt für $\tilde{x}_i \notin (X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$ stets $\mu_i(A_{\tilde{\mu}_i}^\ell) = 0$;

ist dagegen etwa $\tilde{x}_i \in (X_1^1, \dots, X_n^1)$, so existiert zu $\ell = 1, \dots, m$ jeweils genau ein j_ℓ mit $(j_\ell, k_2, \dots, k_n) \in K_\ell$, so daß

$$\mu_i(A_{\tilde{\mu}_i}^\ell) = \sum_{(j_\ell, k_2, \dots, k_n) \in K_\ell} \mu_i(X_1^{j_\ell}) = \mu_i(X_1^1) = \alpha_1.$$

Die bewiesenen Gleichungen ergeben durch Integration die Übereinstimmung aller $2^n - 2$ Schnittmaß-Funktionen der Mengen $A^1, \dots, A^m$. Abschließend wird nun eine andersartige Verallgemeinerung des Falles $n = 2$ betrachtet, die allerdings auf den Produktraum $(R_2, \mathcal{L}_2, I_2)$ beschränkt bleibt.

Statt zu einer Menge $A \in \mathcal{L}_2$ eine Menge $B \in \mathcal{A}\mathcal{L}_2$ zu suchen mit

$$I_1(B_{x_i}) = \frac{1}{2} I_1(A_{x_i}) \quad \text{für } -\infty < x_i < +\infty \text{ und } i = 1, 2,$$

läßt sich hier auch Halbierung aller Schnittmengen zu n gegebenen Richtungen $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in R_2$ mit $|\vec{\alpha}_i| = 1$ verlangen.

Mit $C(\vec{\alpha}) := \{(\alpha_1 x_1 - \alpha_1 x_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) : (x_1, x_2) \in C\} \in \mathcal{L}_2$ für $C \in \mathcal{L}_2$ bedeutet das die Frage nach einer Menge $B \in \mathcal{A}\mathcal{L}_2$ mit

$$I_1(B(\vec{\alpha}_i)_{x_i}) = \frac{1}{2} I_1(A(\vec{\alpha}_i)_{x_i}) \quad \text{für } -\infty < x_i < +\infty \text{ und } i = 1, \dots, n;$$

denn für $|\vec{\alpha}| = 1$ entsteht $C(\vec{\alpha})$ aus C durch eine Drehung um $(0, 0)$, die $\vec{\alpha}$ in $(0, 1)$ überführt.

Auch dieses Problem ist zunächst nicht uneingeschränkt lösbar.

Unter Benutzung der Translations-Invarianz des Lebesgue-Maßes

läßt sich aber zeigen:

Satz 8.3. Zu einer offenen Menge $G \subset R_2$, zu n Vektoren $\vec{\alpha}_i \in R_2$ mit $|\vec{\alpha}_i| = 1$ und zu $m \in \mathbb{Z}$ existiert stets eine Zerlegung $G = A^1 + \dots + A^m$ in $\mathcal{L}_2$ mit

$$I_1(A^1(\vec{\alpha}_i)_{x_i}) = \dots = I_1(A^m(\vec{\alpha}_i)_{x_i}) \quad \text{für } -\infty < x_i < +\infty \text{ und } i = 1, \dots, n.$$

Beweis. 1. Die Annahme $\vec{\alpha}_n = (0, 1)$ bedeutet keine Einschränkung.

Es wird nun vollständige Induktion nach n durchgeführt.

Für $n = 1$ folgt die Behauptung sofort durch $(m-1)$ -malige Anwendung von [3.1]; sie sei also für festes $n \geq 1$ bereits bewiesen.

Da eine offene Menge als disjunkte Vereinigung abzählbar vieler Intervalle $\{(x_1, x_2) : \gamma_i < x_i \leq \delta_i\}$ mit $-\infty < \gamma_i < \delta_i < +\infty$ darstellbar ist, läßt sich dann beim Nachweis der Richtigkeit für $n + 1$ ohne weiteres $G = ((0, \delta_1], (0, \delta_2])$ annehmen.

Seien also die Richtungen $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ und $\vec{\alpha}_{n+1} = (0, 1)$ gegeben.

Dann existiert nach Induktionsannahme eine bzgl. der Richtungen $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ geeignete Zerlegung $((0, \delta_1), (0, \frac{1}{m} \delta_2]) = B^1 + \dots + B^m$ in $\mathcal{X}_2$; denn der Rand dieser Menge ist höchstens bzgl. einer Richtung keine Nullmenge, so daß eine Zerlegung jener offenen Menge, die aus $((0, \delta_1), (0, \frac{1}{m} \delta_2))$ durch eine Drehung von $\vec{\alpha}_n$ nach $(0, 1)$ entsteht, bzgl. gewisser Richtungen $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n = (0, 1)$ genügt.

2. Sei $B_k^\ell := \{(x_1, x_2 + \frac{k-1}{m} \delta_2) : (x_1, x_2) \in B^\ell\}$ für $k = 1, \dots, m$ und $A^\ell := \sum_{1 \leq k \leq m} B_{k+l}^\ell + \{(\delta_1, x_2) : \frac{\ell-1}{m} \delta_2 < x_2 \leq \frac{1}{m} \delta_2\} \in \mathcal{X}_2$ für $l = 1, \dots, m$, wobei der Index $k+l$ modulo m zu verstehen ist.

Dann ist $\sum_{1 \leq \ell \leq m} A^\ell = \sum_{1 \leq k, \ell \leq m} B_k^\ell + \sum_{1 \leq \ell \leq m} \{(\delta_1, x_2) : \frac{\ell-1}{m} \delta_2 < x_2 \leq \frac{1}{m} \delta_2\}$
 $= \sum_{1 \leq \ell \leq m} ((0, \delta_1], (\frac{\ell-1}{m} \delta_2, \frac{1}{m} \delta_2]) = G.$

Die Zerlegung $G = A^1 + \dots + A^m$ ist bzgl. der Richtungen $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ geeignet, da sie in $((0, \delta_1), (\frac{\ell-1}{m} \delta_2, \frac{1}{m} \delta_2])$ eine Zerlegung durch die Mengen $B_k^1, \dots, B_k^m$ bewirkt.

Daneben gilt für $x_1 \in (0, \delta_1)$

$$\begin{aligned} \lambda_1(A_{x_1}^\ell) &= \sum_{1 \leq k \leq m} \lambda_1((B_{k+l}^\ell)_{x_1}) = \sum_{1 \leq k \leq m} \lambda_1(B_{k+l}^\ell) \\ &= \lambda_1((\sum_{1 \leq k \leq m} B_k^\ell)_{x_1}) = \frac{1}{m} \delta_2 \quad \text{für } l = 1, \dots, m; \end{aligned}$$

diese Gleichung gilt auch für $x_1 = \delta_1$, während sonst $\lambda_1(A_{x_1}^\ell) = 0$. ┐

§9. Anhang zum Satz von Liapounoff

Ziel der folgenden Betrachtungen ist zunächst ein einfacher Beweis des Satzes von Liapounoff:

Sind $\mu_1, \dots, \mu_n$ atomlose endliche Maße auf dem σ -Körper $\mathcal{K}$, so ist

$$W(\mu_1, \dots, \mu_n) := \{(\mu_1(A), \dots, \mu_n(A)) : A \in \mathcal{K}\}$$

eine konvexe und kompakte Teilmenge des R_n .

Außerdem wird gezeigt, daß topologische Hilfsmittel eine wesentliche Verschärfung der folgenden für den Beweis grundlegenden Aussage ermöglichen:

Unter den angegebenen Voraussetzungen existiert stets eine Menge $A \in \mathcal{K}$ mit

$$\mu_i(A) = \frac{1}{2} \mu_i(M) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Insbesondere für $n = 2$ gilt zunächst:

Satz 9.1. μ_1, μ_2 seien endliche Maße auf dem σ -Körper $\mathcal{K}$ und a/M eine Funktion zu $\mu := \mu_1 + \mu_2$ mit den Eigenschaften von [2.4].

Dann existieren reelle Zahlen α_1, α_2 mit

$$\mu_i(\{\alpha_1 < a \leq \alpha_2\}) = \frac{1}{2} \mu_i(M) \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Beweis. $g(\alpha) := \min_i (\mu_i(\{a \leq \alpha\}) - \frac{1}{2} \mu_i(M))$ für $0 \leq \alpha \leq \gamma := \mu(M)$

ist wegen $\mu_i(A) \leq \mu(A)$ eine stetige Funktion von α mit

$$g(0) = -\frac{1}{2} \max_i \mu_i(M) \leq 0 \quad \text{und} \quad g(\gamma) = \frac{1}{2} \min_i \mu_i(M) \geq 0.$$

Daher existiert $\beta \in [0, \gamma]$ mit $g(\beta) = 0$, so daß bei geeigneter Nummerierung der beiden Maße

$$(38) \quad \mu_1(\{a \leq \beta\}) - \frac{1}{2} \mu_1(M) \geq 0 \geq \mu_2(\{a \leq \beta\}) - \frac{1}{2} \mu_2(M).$$

Für $0 \leq \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2 \leq \gamma$ wird nun definiert

$$g_i(\{\beta_1, \beta_2\}) := \mu_i(\{\beta_1 < a \leq \beta_2\}), \quad i = 1, 2.$$

Dann sind g_1 und g_2 stetige Funktionen, wobei wegen (38)

$$\left. \begin{aligned} g_1(0, \beta_2) &\geq g_1(0, \beta) && \geq \frac{1}{2} \mu_1(M) \\ g_1(\beta, \beta_2) &\leq g_1(\beta, \gamma) = \mu_1(M) - g_1(0, \beta) && \leq \frac{1}{2} \mu_1(M) \end{aligned} \right\} \quad \text{für } \beta_2 \in [\beta, \gamma],$$

$$\left. \begin{aligned} g_1(\{1, \beta\}) &\leq g_1(0, \beta) & \leq \frac{1}{2} \mu_1(M) \\ g_1(\{1, \gamma\}) &\geq g_1(\beta, \gamma) = \mu_1(M) - g_1(0, \beta) \geq \frac{1}{2} \mu_1(M) \end{aligned} \right\} \quad \text{für } \{1\} \in [0, \beta].$$

Die Funktionen g_1 und g_2 erfüllen daher die Voraussetzungen des allgemeinen Zwischenwertsatzes (siehe [1], Seite 192).

Es existieren also reelle Zahlen $\alpha_1 \in [0, \beta]$ und $\alpha_2 \in [\beta, \gamma]$ mit

$$g_i(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2} \mu_i(M) \quad \text{für } i = 1, 2. \quad \square$$

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich ohne Schwierigkeit zeigen:

Satz 9.2. $\mu_1, \dots, \mu_n$ seien atomlose Maße auf dem σ -Körper $\bar{K}$ mit

$$\mu_1(M) = \dots = \mu_n(M) < \infty.$$

Dann existiert ein σ -Körper $\bar{K}_0 \subset \bar{K}$ derart, daß

$$\mu_1(A) = \dots = \mu_n(A) \quad \text{für } A \in \bar{K}_0 \quad \text{und } \mu_i|_{\bar{K}_0} \text{ atomlos.}$$

Beweis. 1. Es wird vollständige Induktion nach n durchgeführt.

Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen; die Behauptung sei also für festes $n \geq 1$ bereits bewiesen.

Sind dann $\mu_i|_{\bar{K}}$ atomlose Maße mit $\mu_i(M) = \gamma < \infty$ für $i = 1, \dots, n+1$, so erfüllen auch die Maße $\mu'_i := \mu_i + \mu_{n+1}$ für $i = 1, \dots, n$ die Voraussetzungen; nach Induktionsannahme existiert also ein σ -Körper $\bar{K}'_0 \subset \bar{K}_0$ derart, daß

$$\mu'_1(A) = \dots = \mu'_n(A) \quad \text{für } A \in \bar{K}'_0 \quad \text{und } \mu'_i|_{\bar{K}'_0} \text{ atomlos.}$$

Da nun allgemein bei normalen Maßen mit $\mu < \nu$ aus der Atomlosigkeit von $\nu|_{\bar{K}}$ die Atomlosigkeit von $\mu|_{\bar{K}}$ folgt, gilt also

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_1(A) = \dots = \mu_n(A) \quad \text{für } A \in \bar{K}'_0 \quad \text{und} \\ \mu_i|_{\bar{K}'_0} \text{ atomlos mit } \mu_i(M) = \gamma < \infty \quad \text{für } i = 1, \dots, n+1. \end{array} \right.$$

2. Nach [2.4] ist nun die Anwendung von [9.1] auf $\mu_1|_{\bar{K}'_0}$, $\mu_{n+1}|_{\bar{K}'_0}$ möglich; daher existieren Mengen $A_k^A \in \bar{K}'_0$ mit

$$A_{k-1}^A = A_k^{A-1} + A_k^A \quad \text{und} \quad \mu_1(A_k^A) = 2^{-k} \cdot \gamma = \mu_{n+1}(A_k^A)$$

für $k = 1, \dots, 2^l$ und $1 \in \mathbb{Z}$ ($A_0^A := M$).

Da $M := \bigcup \{A_k^A : 1 \leq k \leq 2^l, 1 \in \mathbb{Z}\}$ aus endlichen disjunkten Vereinigungen der Mengen A_k^A besteht, stimmen die endlichen Maße μ_1 und μ_{n+1}

also auf $\mathcal{M}$ und damit auch auf $\bar{\mathcal{K}}_0 := {}^b\mathcal{M}$ überein.

Da ferner in $\bar{\mathcal{K}}_0$ zu $\varepsilon > 0$ Zerlegungen

$$M = A_1 + \dots + A_m \quad \text{mit} \quad \max_i \mu_i(A_i) < \varepsilon$$

existieren, ist $\mu_1|_{\bar{\mathcal{K}}_0}$ außerdem atomlos.

Wegen (39) gilt schließlich für $A \in \bar{\mathcal{K}}_0 < \bar{\mathcal{K}}_0'$

$$\mu_{n+1}(A) = \mu_1(A) = \dots = \mu_n(A),$$

so daß $\bar{\mathcal{K}}_0$ alle geforderten Eigenschaften besitzt. ┘

Die Konvexität ist jetzt eine unmittelbare Folgerung:

Satz 9.3. Sind $\mu_1, \dots, \mu_n$ atomlose endliche Maße auf dem σ -Körper $\bar{\mathcal{K}}$, so ist $W(\mu_1, \dots, \mu_n)$ eine konvexe Teilmenge des R_n .

Beweis. 1. Für eine feste Menge $A_0 \in \bar{\mathcal{K}}$ sei

$$\mu_i'(A) := \frac{\mu_i(A_0 A)}{\mu_i(A_0)}, \quad \text{falls} \quad \mu_i(A_0) > 0.$$

Die Maße $\mu_i'|_{\bar{\mathcal{K}}}$ erfüllen dann wegen $\mu_i'(M) = 1$ die Voraussetzungen von [9.2], stimmen also auf einem σ -Körper $\bar{\mathcal{K}}_0 < \bar{\mathcal{K}}$ überein und sind auf $\bar{\mathcal{K}}_0$ außerdem atomlos.

Zu $\mathcal{J}_0 \in [0, 1]$ existiert daher nach [2.2] eine Menge $B_0 \in \bar{\mathcal{K}}_0$ mit $\mu_i'(B_0) = \mathcal{J}_0$, so daß (auch falls $\mu_i(A_0) = 0$)

$$\mu_i(A_0 B_0) = \mathcal{J}_0 \mu_i(A_0) \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n.$$

2. Seien nun $A_1, A_2 \in \bar{\mathcal{K}}$ und $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \geq 0$ mit $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = 1$ beliebig. Nach den bisherigen Überlegungen existieren dann jedenfalls Mengen $B_1 \in A_1 \bar{A}_2 \bar{\mathcal{K}}$ und $B_2 \in A_2 \bar{A}_1 \bar{\mathcal{K}}$ mit

$$\mu_i(B_1) = \mathcal{J}_1 \mu_i(A_1 \bar{A}_2) \quad \text{und} \quad \mu_i(B_2) = \mathcal{J}_2 \mu_i(A_2 \bar{A}_1) \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n.$$

Für $A := A_1 A_2 + B_1 + B_2 \in \bar{\mathcal{K}}$ bedeutet das

$$\begin{aligned} \mu_i(A) &= (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2) \mu_i(A_1 A_2) + \mathcal{J}_1 \mu_i(A_1 \bar{A}_2) + \mathcal{J}_2 \mu_i(A_2 \bar{A}_1) \\ &= \mathcal{J}_1 \mu_i(A_1) + \mathcal{J}_2 \mu_i(A_2) \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad \text{┘}$$

Von Interesse ist nun die Verallgemeinerung von [9.1] auf n Maße:

Satz 9.4. $\mu_1, \dots, \mu_n$ seien endliche Maße auf dem σ -Körper $\bar{\mathcal{K}}$; ferner sei $\mu := \mu_1 + \dots + \mu_n$.

Ist dann $a|M$ eine $\bar{\mathcal{K}}$ -meßbare Funktion mit $\mu(\{a \leq \alpha\}) = \alpha$ für

$0 \leq \alpha \leq \mu(M)$, so existieren reelle Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit

$0 =: \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1} := \mu(M)$ derart, daß

$$\mu_i(\sum_{\ell=0}^{\infty} \{\alpha_{2\ell-1} < a \leq \alpha_{2\ell}\}) = \frac{1}{2} \mu_i(M) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Beweis. 1. Für $\vec{f} \in S_n := \{(\{f_0, \dots, f_n\}) : \sum_{0 \leq k \leq n} f_k^2 = 1\}$ sei

$$g_i(\vec{f}) := \mu_i(\{f_0 + f_1 a + \dots + f_n a^n > 0\}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Für $\vec{f}^1, \vec{f}^2 \in S_n$ gilt dann mit der Abkürzung $b^i(x) := \sum_{0 \leq k \leq n} f_k^i a^k(x)$

$$|b^1(x) - b^2(x)| \leq \sum_{0 \leq k \leq n} |f_k^1 - f_k^2| |a(x)|^k \leq \gamma \delta \mu\text{-fast,}$$

wobei $\gamma := (n+1) \max\{1, \mu(M)\}^n$ und $\delta := |\vec{f}^1 - \vec{f}^2|$.

Das ergibt wegen $|\mu_i(A) - \mu_i(B)| \leq \mu_i(A + B)$

$$|g_i(\vec{f}^1) - g_i(\vec{f}^2)| \leq \mu_i(\{b^1 > 0\} + \{b^2 > 0\})$$

$$= \mu_i(\{b^1 - b^2 < b^1 \leq 0\} + \{0 < b^1 \leq b^1 - b^2\}) \leq \mu_i(\{|b^1| \leq \gamma \delta\}).$$

Bezeichnet N die Menge der reellen Nullstellen des Polynoms

$P^1(\alpha) := f_0^1 + f_1^1 \alpha + \dots + f_n^1 \alpha^n$, so gilt dabei für $\delta \rightarrow 0$

$$\mu_i(\{|b^1| \leq \gamma \delta\}) \rightarrow \mu_i(\{b^1 = 0\}) = \mu_i(\{a \in N\})$$

$$\leq \mu(\{a \in N\}) = \lambda_1([0, \mu(M)] \cap N) = 0.$$

Daher definiert $\vec{g}_i$ eine stetige Abbildung der S_n in den R_n .

2. Nach dem Satz von Borsuk-Ulam (siehe [4], Seite 139)*)

existieren daher zwei Diametralpunkte $\pm \vec{f} \in S_n$ mit

$$g_i(-\vec{f}) = g_i(+\vec{f}) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Seien nun $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m$ ($m \leq n$) die reellen Nullstellen des Polynoms

$P(\alpha) := f_0 + f_1 \alpha + \dots + f_n \alpha^n$ im Intervall (α_0, α_{n+1}) gemäß ihrer

Vielfachheit und zusätzlich $\alpha_{m+1} = \dots = \alpha_n = \alpha_{n+1}$, falls $m < n$.

Dann gilt, wenn etwa $P(\alpha) > 0$ für $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$, wegen

$$\mu(\{a < \alpha_0\}) = \mu(\{a = \alpha_i\}) = \mu(\{a > \alpha_{n+1}\}) = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} g_i(+\vec{f}) &= \mu_i(\{+P(a) > 0\}) = \mu_i(\sum_{\ell=0}^{\infty} \{\alpha_{2\ell} < a \leq \alpha_{2\ell+1}\}) \\ g_i(-\vec{f}) &= \mu_i(\{-P(a) > 0\}) = \mu_i(\sum_{\ell=0}^{\infty} \{\alpha_{2\ell+1} < a \leq \alpha_{2\ell+2}\}) \end{aligned} \right\} \quad \text{für } i=1, \dots, n.$$

*) Eine ähnliche Anwendung dieses Satzes findet sich in:

H. Steinhaus, Sur la division de l'espace par les plans...

Fund. Math. 33, 245-263 (1945)

Die Gleichheit der linken Seiten führt daraus zur Behauptung, da

$$\mu_i \left(\sum_{\ell \geq 0} \{ \alpha_{2\ell} < a \leq \alpha_{2\ell+1} \} \right) + \mu_i \left(\sum_{\ell \geq 0} \{ \alpha_{2\ell+1} < a \leq \alpha_{2\ell+2} \} \right) = \mu_i(M). \quad \square$$

Besondere Bedeutung besitzt dieser Satz, falls es sich um atomlose Maße auf dem σ -Körper $\mathcal{L}_1$ über der Grundmenge R_1 handelt.

Hier ist $a(x) := \mu((-\infty, x])$ eine geeignete Funktion.

Denn $a(x)$ wächst monoton und ist wegen der Atomlosigkeit von

$\mu = \mu_1 + \dots + \mu_n$ stetig, so daß

$$\mu(\{a \leq \alpha\}) = \sup_{a(x) \leq \alpha} \mu((-\infty, x]) = \alpha \quad \text{für } 0 \leq \alpha \leq \mu(R_1).$$

Dabei gilt für die nach [9.4] vorhandenen reellen Zahlen α_i

$$\{a \leq \alpha_i\} = (-\infty, \gamma_i] \quad \text{mit } -\infty \leq \gamma_i \leq +\infty,$$

und somit lauten die bewiesenen Gleichungen für $i = 1, \dots, n$

$$\mu_i \left(\sum_{\ell \geq 0} (\gamma_{2\ell}, \gamma_{2\ell+1}] \right) = \frac{1}{2} \mu_i(R_1) = \mu_i \left(\sum_{\ell \geq 0} (\gamma_{2\ell+1}, \gamma_{2\ell+2}] \right).$$

Sind also n atomlose endliche Maße $\mu_i|_{\mathcal{L}_1}$ gegeben, so läßt sich der R_1 stets durch n Punkte $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ in zwei bzgl. $\mu_1, \dots, \mu_n$ maßgleiche Teile zerlegen; insbesondere gilt daher

$$\mu_i(J) = \frac{1}{2} \mu_i(R_1) \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

mit einer Vereinigung J von höchstens $\left[\frac{n+1}{2} \right]$ Intervallen.

Daß weniger als n Unterteilungspunkte γ_i im allgemeinen nicht genügen, zeigt folgendes Beispiel:

Sei $\mu_i(A) := \lambda_i(A(i-1, i])$ für $i = 1, \dots, n$;

dann enthält notwendigerweise jedes der n Intervalle $(i-1, i]$ einen der Unterteilungspunkte.

Um nun den zweiten Teil des Satzes von Liapounoff beweisen zu können, wird lediglich folgende Darstellung der abgeschlossenen Hülle $W(\mu_1, \dots, \mu_n)^\alpha$ des Wertebereichs benötigt:

Satz 9.5. $\mu_1, \dots, \mu_n$ seien atomlose endliche Maße auf dem σ -Körper $\mathcal{E}$.

Dann gilt mit $\mu := \mu_1 + \dots + \mu_n$

$$W(\mu_1, \dots, \mu_n)^\alpha = \left\{ \left(\int_{\mathcal{E}} f d\mu_1, \dots, \int_{\mathcal{E}} f d\mu_n \right) : f \in \mathcal{L}(\mu), 0 \leq f \leq 1 \right\}.$$

Beweis. 1. Sei $\{f_i\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_i(A_m)$ für $i = 1, \dots, n$ mit $A_m \in \mathcal{K}$.

Die Funktionen $\chi_{A_m} \in \mathcal{L}(\mu)$ sind gleichmäßig beschränkt, da

$$\|\chi_{A_m}\| \leq \mu(M) < \infty \quad \text{für } m \in \mathbb{Z},$$

sowie gleichmäßig σ -additiv, da

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}} \int_{D_k} \chi_{A_m} d\mu \leq \mu(D_k) \rightarrow 0$$

für $D_k \in \mathcal{K}$ mit $D_1 \supset D_2 \supset \dots$ und $\bigcap_k D_k = \emptyset$.

Die Folge (χ_{A_m}) besitzt aus diesen beiden Gründen bzgl. schwacher Konvergenz einen Häufungspunkt $f \in \mathcal{L}(\mu)$ (siehe [2], Seite 292),

d.h. für eine geeignete Teilfolge gilt

$$(40) \quad \begin{cases} \int_M \chi_{A_{m_k}} g d\mu \rightarrow \int_M f g d\mu, \\ \text{falls } g|_M \mathcal{K}\text{-meßbar und } \mu\text{-fast beschränkt.} \end{cases}$$

Wird hierin insbesondere $g = \chi_A$ gesetzt, so liefert das

$$0 \leq \int_A f d\mu \leq \mu(A) \quad \text{für } A \in \mathcal{K},$$

d.h. es läßt sich $0 \leq f \leq 1$ annehmen.

Wegen $\mu_i(A) \leq \mu(A)$ existieren nun $\mathcal{K}$ -meßbare Funktionen $g_i|_M$ derart, daß

$$\mu_i(A) = \int_A g_i d\mu \quad \text{für } A \in \mathcal{K} \text{ mit } 0 \leq g_i \leq 1, \text{ so daß wegen (40)}$$

$$\begin{aligned} f_i &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_i(A_{m_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M \chi_{A_{m_k}} g_i d\mu \\ &= \int_M f g_i d\mu = \int_M f d\mu_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

2. Beim Nachweis der Umkehrung läßt sich die Funktion

$f \in \mathcal{L}(\mu)$ als endliche Treppenfunktion annehmen; denn $f|_M$ ist gleichmäßiger Limes von $t_m := \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{1}{m} \chi_{\{\frac{l-1}{m} < f \leq \frac{l}{m}\}} \in \mathcal{L}(\mu)$ mit $0 \leq t_m \leq 1$

und $W(\mu_1, \dots, \mu_n)^{\mathcal{K}}$ abgeschlossen.

Sei also $t = \sum_{1 \leq l \leq m} \alpha_l \chi_{A_l}$ mit $0 =: \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m = 1$ und $A_l \in \mathcal{K}$, $\sum_{1 \leq l \leq m} A_l = M$.

Da $W(\mu_1, \dots, \mu_n)$ nach [9.3] konvex ist, existiert zu

$$f_k := \alpha_k - \alpha_{k-1} \geq 0 \quad \text{mit} \quad \sum_{1 \leq k \leq m} f_k = 1 \quad \text{und} \quad B_k := \sum_{l > k} A_l \in \mathcal{K}$$

eine Menge $A \in \mathcal{K}$ derart, daß

$\mu_i(A) = \sum_{1 \leq k \leq m} \lambda_k \mu_i(B_k)$ für $i = 1, \dots, n$, so daß

$$\begin{aligned} \mu_i(A) &= \sum_{1 \leq k \leq m} \sum_{\ell \leq k} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \mu_i(A_\ell) = \sum_{1 \leq \ell \leq m} \sum_{k \leq \ell} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \mu_i(A_\ell) \\ &= \sum_{1 \leq \ell \leq m} \alpha_\ell \mu_i(A_\ell) = \int_M t \, d\mu_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Die Atomlosigkeit wurde dabei nur verwendet zum Beweis von

$$W(\mu_1, \dots, \mu_n)^{\omega} \supset \left\{ \left(\int_M f \, d\mu_1, \dots, \int_M f \, d\mu_n \right) : f \in \mathcal{L}(\mu), 0 \leq f \leq 1 \right\}.$$

Eine einfache Ergänzung dieses Satzes ist:

Satz 9.6. Es seien die Voraussetzungen von [9.5] gegeben.

Ist dann $(\int_M f \, d\mu_1, \dots, \int_M f \, d\mu_n)$ mit $f \in \mathcal{L}(\mu)$ und $0 \leq f \leq 1$ ein Extrempunkt von $W(\mu_1, \dots, \mu_n)^{\omega}$, so ist $\mu(\{0 < f < 1\}) = 0$.

Beweis. Sei $A_m := \{\frac{1}{m} < f < 1 - \frac{1}{m}\} \in \mathcal{K}$ und

$$g_m := f - \frac{1}{m} \chi_{A_m} \in \mathcal{L}(\mu), \quad h_m := f + \frac{1}{m} \chi_{A_m} \in \mathcal{L}(\mu) \quad \text{für } m \in \mathbb{Z}.$$

Nach [9.5] gilt dann

$$\left(\int_M g_m \, d\mu_1, \dots, \int_M g_m \, d\mu_n \right), \left(\int_M h_m \, d\mu_1, \dots, \int_M h_m \, d\mu_n \right) \in W(\mu_1, \dots, \mu_n)^{\omega},$$

wobei $\int_M f \, d\mu_i = \frac{1}{2} \int_M g_m \, d\mu_i + \frac{1}{2} \int_M h_m \, d\mu_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Nach Voraussetzung ist also $\int_M g_m \, d\mu_i = \int_M h_m \, d\mu_i$, d.h.

$$\frac{2}{m} \mu_i(A_m) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n, \text{ so daß}$$

$$\mu(\{0 < f < 1\}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i \leq n} \mu_i(A_m) = 0.$$

Die Kompaktheit ist jetzt eine unmittelbare Folgerung:

Satz 9.7. Sind $\mu_1, \dots, \mu_n$ atomlose endliche Maße auf dem σ -Körper $\mathcal{K}$, so ist $W(\mu_1, \dots, \mu_n)$ eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}_n$.

Beweis. $W(\mu_1, \dots, \mu_n)^{\omega} \subset \left\{ \vec{f} : 0 \leq f_i \leq \mu_i(M) \right\}$ ist als kompakte und

nach [9.3] konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}_n$ die konvexe Hülle der Extrempunkte; diese lassen sich nach [9.5] darstellen in der Gestalt

$$\left(\int_M f \, d\mu_1, \dots, \int_M f \, d\mu_n \right) \text{ mit } f \in \mathcal{L}(\mu_1 + \dots + \mu_n) \text{ und } 0 \leq f \leq 1,$$

wobei nach [9.6] $\int_M f \, d\mu_i = \mu_i(A)$ mit $A := \{f = 1\} \in \mathcal{K}$.

Das ergibt $W(\mu_1, \dots, \mu_n)^{\omega} \subset W(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

§10. Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse

$(M, \bar{\mathcal{K}}, \mu)$ sei der Produktraum der normalen Maßräume $(M_1, \bar{\mathcal{K}}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \bar{\mathcal{K}}_2, \mu_2)$; dann gilt:

1. Ist $g \in \mathcal{L}(\mu)$ eine nicht-negative Funktion, so ergeben sich in der Form $(\int_{M_2} f(x_1, x_2) d\mu_2, \int_{M_1} f(x_1, x_2) d\mu_1)$ mit $f \in \mathcal{L}(\mu)$ und $0 \leq f \leq g$ genau jene Paare $(f_1, f_2) \in (\mathcal{L}(\mu_1), \mathcal{L}(\mu_2))$, für die

$$\begin{aligned} \int_{x_1} f_1 d\mu_1 &\leq \int_{M_2} \min \{ f_2(x_2), \int_{x_1} g(x_1, x_2) d\mu_1 \} d\mu_2 & \text{für } x_1 \in \bar{\mathcal{K}}_1, \\ \int_{x_2} f_2 d\mu_2 &\leq \int_{M_1} \min \{ f_1(x_1), \int_{x_2} g(x_1, x_2) d\mu_1 \} d\mu_1 & \text{für } x_2 \in \bar{\mathcal{K}}_2. \end{aligned}$$

Es seien $\mu_1 \upharpoonright \bar{\mathcal{K}}_1$ und $\mu_2 \upharpoonright \bar{\mathcal{K}}_2$ außerdem atomlose Maße; dann gilt:

2. Sind $f \upharpoonright M$ und $g \upharpoonright M$ $\bar{\mathcal{K}}$ -meßbare Funktionen mit $0 \leq f \leq g < \infty$, so existiert eine Menge $A \in \bar{\mathcal{K}}$ derart, daß für $x_i \in M_i$

$$\int_{M_2} f(x_1, x_2) d\mu_2 = \int_{A_{x_1}} g(x_1, x_2) d\mu_2 \quad \text{und} \quad \int_{M_1} f(x_1, x_2) d\mu_1 = \int_{A_{x_2}} g(x_1, x_2) d\mu_1.$$

3. Zu $A \in \bar{\mathcal{K}}$ und $n \in \mathbb{Z}$ existieren stets Zerlegungen $A = \bigcup_{m=1}^n A^m$ in $\bar{\mathcal{K}}$ mit

$$\mu_2(A_{x_1}^1) = \dots = \mu_2(A_{x_1}^n) \quad \text{und} \quad \mu_1(A_{x_2}^1) = \dots = \mu_1(A_{x_2}^n) \quad \text{für } x_i \in M_i.$$

4. Ist A eine Menge endlichen Maßes, so gilt für die Gesamtheit

$$\mathcal{V}(A) = \{ (\mu_2(B_{x_1}), \mu_1(B_{x_2})) : B \in A\bar{\mathcal{K}} \}:$$

a) $\mathcal{V}(A)$ ist eine konvexe und bzgl. schwacher Konvergenz kompakte Teilmenge von $(\mathcal{L}(\mu_1), \mathcal{L}(\mu_2))$ mit dem Symmetriepunkt $(\frac{1}{2}\mu_2(A_{x_1}), \frac{1}{2}\mu_1(A_{x_2}))$.

b) Die Extrempunkte von $\mathcal{V}(A)$ ergeben sich für jene Mengen B , die durch ihre Schnittmaß-Funktionen in A μ -fast bestimmt sind.

c) $\mathcal{V}(A)$ läßt sich charakterisieren als die Gesamtheit aller Paare $(f_1, f_2) \in (\mathcal{L}(\mu_1), \mathcal{L}(\mu_2))$, die nachstehenden Ungleichungen genügen:

$$\begin{aligned} \int_{x_1} f_1 d\mu_1 &\leq \int_{M_2} \min \{ f_2(x_2), \mu_2(A_{x_1} \cap x_2) \} d\mu_2 & \text{für } x_1 \in \bar{\mathcal{K}}_1, \\ \int_{x_2} f_2 d\mu_2 &\leq \int_{M_1} \min \{ f_1(x_1), \mu_1(A_{x_2} \cap x_1) \} d\mu_1 & \text{für } x_2 \in \bar{\mathcal{K}}_2. \end{aligned}$$

Falls dabei $0 \leq f_1(x_1) \leq \mu_2(A_{x_1})$ und $0 \leq f_2(x_2) \leq \mu_1(A_{x_2})$ für alle x_i ,

läßt sich die Menge $B \in A\bar{\mathcal{K}}$ so wählen, daß

$$f_1(x_1) = \mu_2(B_{x_1}) \quad \text{und} \quad f_2(x_2) = \mu_1(B_{x_2}) \quad \text{für alle } x_i.$$

Literaturverzeichnis

Lehrbücher:

- [1] G.Aumann, Reelle Funktionen.
Springer-Verlag, Berlin (1954)
- [2] N.Dunford - J.Schwartz, Linear Operators.
Interscience Publishers, New York (1958)
- [3] P.Halmos, Measure Theory.
Van Norstrand Company, Princeton (1958)
- [4] S.Lefschetz, Introduction to Topology.
Princeton University Press, Princeton (1949)

Zeitschriftenaufsätze:

- [5] D.Blackwell, The range of certain vector integrals.
Proc. Amer. Math. Soc. 2, 390-395 (1951)
- [6] P.Halmos, The range of a vector measure.
Bull. Amer. Math. Soc. 54, 416-421 (1948)
- [7] A.Liapounoff, Sur les fonctions-vecteurs complètement additives.
Bull. Acad. Sci. URSS (Sér. Math.) 4, 465-478 (1940)
- [8] A.Dvoretzky - A.Wald - J.Wolfowitz, Relations among certain ranges of vector measures.
Pacific Journ. Math. 1, 59-74 (1951)

Lebenslauf

Am 2.10.34 wurde ich als Sohn des Universitätsprofessors Hans Kellerer und seiner Ehefrau Agnes, geb. Bruchhausen, in Essen geboren. Von 1941 bis 1945 besuchte ich die Volksschule in Berlin und Altötting/Obb. und im Anschluß daran die humanistischen Gymnasien in Metten und Ettal. Auf Grund der Übersiedlung meiner Eltern nach München trat ich 1951 in das dortige Maximilians-Gymnasium über, wo ich im Juli 1953 die Reifeprüfung ablegte.

Im Wintersemester 1953/54 immatrikulierte ich mich an der Universität München als ordentlicher Studierender der Volkswirtschaftslehre. Im Wintersemester 1954/55 wechselte ich die Fakultät und begann mein Mathematik-Studium, das ich im Sommersemester 1958 mit dem Diplom wirtschaftswissenschaftlicher Richtung abschloß. Ab 1.1.59 verwalte ich die Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Mathematischen Institut der Universität München.

